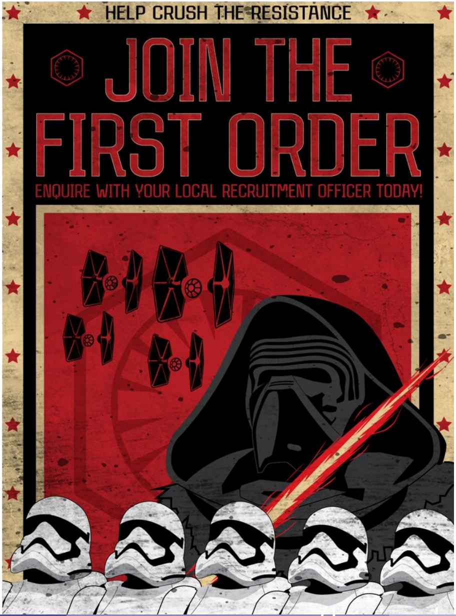
Tema 2: Cálculo de Predicados
(Lógica de Primer Orden)

Lógica-GIA

Curso 2024–2025

First Order Logic



Cálculo de predicados

- El Cálculo de Predicados, o Lógica de Primer Orden (LPO), permite hablar de individuos y sus relaciones.

Cálculo de predicados

- El Cálculo de Predicados, o Lógica de Primer Orden (LPO), permite hablar de individuos y sus relaciones.

- El término "Primer Orden" significa que podemos cuantificar sobre individuos utilizando $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe). Por ejemplo, $\forall x \left(Hombre(x) \to Mortal(x) \right)$.

Cálculo de predicados

- El Cálculo de Predicados, o Lógica de Primer Orden (LPO), permite hablar de individuos y sus relaciones.

- El término "Primer Orden" significa que podemos cuantificar sobre individuos utilizando $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe). Por ejemplo, $\forall x \left(Hombre(x) \rightarrow Mortal(x) \right)$.

- La Lógica de Segundo Orden permite cuantificar sobre relaciones.

Cálculo de predicados

- El Cálculo de Predicados, o Lógica de Primer Orden (LPO), permite hablar de individuos y sus relaciones.
- El término "Primer Orden" significa que podemos cuantificar sobre individuos utilizando $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe). Por ejemplo, $\forall x \left(Hombre(x) \to Mortal(x) \right)$.
- La Lógica de Segundo Orden permite cuantificar sobre relaciones.
- Hay lógicas de orden superior...

Sintaxis: Signatura

Signatura en Lógica de Primer Orden: $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$ donde

- $\mathcal{C}$, conjunto de constantes,
- $\mathcal{F}$, conjunto de funciones,
- $\mathcal{R}$, conjunto de relaciones o predicados,
- $\delta \colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{Z}^+$, indica el grado o aridad de cada función o predicado.

Sintaxis: Signatura

Signatura en Lógica de Primer Orden: $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$ donde

- $\mathcal{C}$, conjunto de constantes,
- $\mathcal{F}$, conjunto de funciones,
- $\mathcal{R}$, conjunto de relaciones o predicados,
- $\delta\colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{Z}^+$, indica el grado o aridad de cada función o predicado.

Sintaxis: Signatura

Signatura en Lógica de Primer Orden: $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$ donde

- $\mathcal{C}$, conjunto de constantes,
- $\mathcal{F}$, conjunto de funciones,
- $\mathcal{R}$, conjunto de relaciones o predicados,
- $\delta \colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{Z}^+$, indica el grado o aridad de cada función o predicado.

Ejemplo:

- $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$
- $\mathcal{F} = \{sig, min\}$
- $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$
- $\delta(sig) = 1,\ \delta(min) = 2,$
  $\delta(lab) = 1, \delta(anterior) = 2.$

Sintaxis: Signatura

Signatura en Lógica de Primer Orden: $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$ donde

- $\mathcal{C}$, conjunto de constantes,
- $\mathcal{F}$, conjunto de funciones,
- $\mathcal{R}$, conjunto de relaciones o predicados,
- $\delta\colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{Z}^+$, indica el grado o aridad de cada función o predicado.

Ejemplo:

- $\mathcal{C} = \{0, 1\}$
- $\mathcal{F} = \{\mathit{siguiente}, \mathit{suma}, \mathit{producto}\}$
- $\mathcal{R} = \{\mathit{menor}, \mathit{par}\}$
- $\delta(\mathit{siguiente}) = 1,\ \delta(\mathit{suma}) = 2,\ \delta(\mathit{producto}) = 2,$
  $\delta(\mathit{menor}) = 2,\ \delta(\mathit{par}) = 1.$

Sintaxis: Términos

Los términos son las expresiones del lenguaje que se identifican con posibles objetos del mundo.

- Se define un término como:
  - una constante c,
  - una variable x,
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = n$, y donde cada t_i es, a su vez, un término.

Sintaxis: Términos

Los términos son las expresiones del lenguaje que se identifican con posibles objetos del mundo.

- Se define un término como:
  - una constante c,
  - una variable x,
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = n$, y donde cada t_i es, a su vez, un término.

▷ Si $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$, $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$

- son términos:
  - ℓ
  - $sig(x)$
  - $min(sig(x), v)$
  - $sig(min(m, d))$

Sintaxis: Términos

Los términos son las expresiones del lenguaje que se identifican con posibles objetos del mundo.

- Se define un término como:
  - una constante c,
  - una variable x,
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = n$, y donde cada t_i es, a su vez, un término.

▷ Si $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$, $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$

- son términos:
  - ℓ
  - $sig(x)$
  - $min(sig(x), v)$
  - $sig(min(m, d))$
- no son términos:
  - $lab(x)$ $(lab \notin \mathcal{F})$
  - $sig(m, v)$ $(\delta(sig) \neq 2)$

Sintaxis: Términos

Los términos son las expresiones del lenguaje que se identifican con posibles objetos del mundo.

- Se define un término como:
  - una constante c,
  - una variable x,
  - una expresión $f(t_1, \dots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = n$, y donde cada t_i es, a su vez, un término.

▷ Si $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{siguiente, suma, producto\}$, $\mathcal{R} = \{menor, par\}$

- son términos:
  - 1, x
  - $suma(x, 1)$
  - $siguiente(suma(x, 1))$
  - $suma(producto(x, 0), siguiente(z))$
- no son términos:
  - $menor(0, 1)$ $(menor \notin \mathcal{F})$
  - $suma(menor(0, 1), 1)$ $(menor(0, 1)$ no es un término$)$

Sintaxis: fórmulas

Las fórmulas son las expresiones que se identifican con afirmaciones sobre los objetos del mundo, y tendrán la posibilidad de ser evaluadas como verdaderas o falsas.

- Las fórmulas se construyen combinando la signatura con
  - los operadores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - los cuantificadores $\forall$, $\exists$
  - variables: x, y, $z, \ldots$
  - símbolos auxiliares: (y)

▷ En LPO no puede haber símbolos comunes entre los conjuntos de variables y constantes, ni entre los símbolos de función y de predicado.

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

▷ Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$

- son fórmulas:
  - $lab(x)$
  - $anterior(x, \ell)$
  - $lab(x) \rightarrow anterior(x, \ell)$
  - $\forall x\, [\, lab(x) \rightarrow anterior(x, \ell)\,]$

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \to \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

▷ Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$

- son fórmulas:
  - $lab(x)$
  - $anterior(x, \ell)$
  - $lab(x) \to anterior(x, \ell)$
  - $\forall x\, [\, lab(x) \to anterior(x, \ell)\,]$
- no son fórmulas:
  - $min(\ell, y)$ ($min \notin \mathcal{R}$)
  - $anterior(\ell, lab(s))$ ($lab(s)$ no es un término)

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

▷ Para $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{siguiente, suma, producto\}$, $\mathcal{R} = \{menor, par\}$

- son fórmulas:
  - $par(1)$,
  - $menor(x, 1)$
  - $par(x) \rightarrow menor(x, 1)$
  - $\forall x\; [\, par(x) \rightarrow menor(x, 1) \,]$

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

▷ Para $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{siguiente, suma, producto\}$, $\mathcal{R} = \{menor, par\}$

- son fórmulas:
  - $par(1)$,
  - $menor(x, 1)$
  - $par(x) \rightarrow menor(x, 1)$
  - $\forall x\, [\, par(x) \rightarrow menor(x, 1)\,]$
- no son fórmulas:
  - $suma(1, y)$ ($suma \notin \mathcal{R}$)
  - $menor(0, par(x))$ ($par(x)$ no es un término)

Sintaxis: Variables libres y variables ligadas

- Una variable x es libre (resp. ligada) en una fórmula cuando:
  - en un átomo:
    toda variable es libre

Sintaxis: Variables libres y variables ligadas

- Una variable x es libre (resp. ligada) en una fórmula cuando:
  - en un átomo:
    toda variable es libre
  - en $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$:
    x es libre (resp. ligada) si, y sólo si, lo es en α o en β.

Sintaxis: Variables libres y variables ligadas

- Una variable x es libre (resp. ligada) en una fórmula cuando:
  - en un átomo:
    toda variable es libre
  - en $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$:
    x es libre (resp. ligada) si, y sólo si, lo es en α o en β.
  - en $\exists x \alpha$, $\forall x \alpha$:
    x ligada; y libre (resp. ligada) si, y sólo si, lo es en α.

- Las fórmulas sin variables libres se llaman fórmulas cerradas o sentencias

▷ Una variable puede ser libre y ligada a la vez en la misma fórmula

$$[\forall x\,(P(x) \to Q(x,y))] \to [\exists y\,(P(y) \to Q(z,x))]$$

libres: x, y, z; ligadas: x, y

Semántica: Interpretación

Una interpretación I (para la signatura $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$) es un par (D, I) donde:

- D es un conjunto no vacío, denominado dominio o universo,
- I es una función definida sobre los símbolos propios del lenguaje:
  - para cada constante $c \in \mathcal{C}$,
    c_I es un elemento de D,
  - $f_I : D^n \rightarrow D$ es una función $n - aria$ en D,
  - $P_I : D^n \rightarrow \{F, T\}$ es una aplicación
    (identificamos $P_I = \{(d_1, \cdots, d_n) \in D^n \mid P_I(d_1, \cdots, d_n) = T\} \subseteq D^n$)

Semántica: Interpretación

Una interpretación I (para la signatura $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$) es un par (D, I) donde:

- D es un conjunto no vacío, denominado dominio o universo,
- I es una función definida sobre los símbolos propios del lenguaje:
    - para cada constante $c \in \mathcal{C}$,
      c_I es un elemento de D,
    - $f_I : D^n \to D$ es una función $n - aria$ en D,
    - $P_I : D^n \to \{F, T\}$ es una aplicación
      (identificamos $P_I = \{(d_1, \cdots, d_n) \in D^n \mid P_I(d_1, \cdots, d_n) = T\} \subseteq D^n$)

Una asignación σ (para una interpretación I) es una aplicación que asigna, a cada variable x, un elemento $\sigma(x)$ del dominio D.

Semántica: Ejemplos de interpretaciones

Para $\mathcal{C} = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{sig, suma\}$, $\mathcal{R} = \{menor\}$,
$\delta(sig) = 1$, $\delta(suma) = 2$, $\delta(nenor) = 2$.

▷ Una posible interpretación está dada por:

- $D = \mathbb{N}$
- $0_I = 0$
- $sig_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \rightsquigarrow n + 1$
  $suma_I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \rightsquigarrow n + m$
- $menor_I = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n < m\}$

▷ Otra interpretación para la misma signatura:

- $D = \{0, 1\}^*$, conjunto de las cadenas binarias
- $0_I = \lambda$, cadena vacía
- $sig_I : D \to D, \quad \omega \rightsquigarrow \omega\, 1$
  $suma_I : D \times D \to D, \quad (\omega, \omega') \rightsquigarrow \omega\, \omega'$, concatenación
- $menor_I = \{(\omega, \omega') \in D \times D \mid \omega \text{ es prefijo de } \omega'\}$

Semántica: Evaluación de términos

La **evaluación** $v_{I,\sigma}(t)$ de un **término** t con respecto a una interpretación I y una asignación σ se define como:

$$v_{I,\sigma}(t) = \begin{cases} c_I & \text{si t es una constante } c \\ \sigma(x) & \text{si t es una variable } x \\ f_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) & \text{si t es } f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

La evaluación de un término t es siempre un elemento del dominio:

$$v_{I,\sigma}(t) \in D, \text{ para todo término } t$$

Semántica: Ejemplo de evaluación de un término

Para $\mathcal{C} = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{sig, suma\}$, $\mathcal{R} = \{menor\}$

- $D = \mathbb{N}$
- $0_I = 0$
- $sig_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \rightsquigarrow n + 1$
  $suma_I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \rightsquigarrow n + m$

Para el término $t = suma(sig(0), x)$ y la asignación $\sigma(x) = 3$

$$\begin{aligned}
v_{I,\sigma}(t) &= v_{I,\sigma}\big(\, suma(sig(0),\ x)\,\big) \\
&= suma_I\big(\, v_{I,\sigma}(sig(0)), v_{I,\sigma}(x)\,\big) \\
&= suma_I\big(\, sig_I(0),\ 3\,\big) \\
&= suma_I(0 + 1,\ 3) \\
&= 1 + 3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de una fórmula

Si $\sigma : Var \to D$ es una asignación y $d \in D$, $\sigma[x \leftarrow d]$ representa la asignación definida por

$$\sigma[x \leftarrow d](z) = \begin{cases} d & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si si } z \neq x \end{cases}$$

La evaluación $v_{I,\sigma}(\alpha)$ de una fórmula α respecto a I y σ se define como:

- $v_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = T$ sii $P_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) = T$

Semántica: Evaluación de una fórmula

Si $\sigma : Var \to D$ es una asignación y $d \in D$, $\sigma[x \leftarrow d]$ representa la asignación definida por

$$\sigma[x \leftarrow d](z) = \begin{cases} d & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si } \text{ si } z \neq x \end{cases}$$

La evaluación $v_{I,\sigma}(\alpha)$ de una fórmula α respecto a I y σ se define como:

- $v_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = T$ sii $P_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) = T$
- $v_{I,\sigma}(\neg\alpha)$ y $v_{I,\sigma}(\alpha * \beta)$ con $* \in \{\wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow\}$ se definen como en el caso proposicional

Semántica: Evaluación de una fórmula

Si $\sigma : Var \to D$ es una asignación y $d \in D$, $\sigma[x \leftarrow d]$ representa la asignación definida por

$$\sigma[x \leftarrow d](z) = \begin{cases} d & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si si } z \neq x \end{cases}$$

La evaluación $v_{I,\sigma}(\alpha)$ de una fórmula α respecto a I y σ se define como:

- $v_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = T$ sii $P_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) = T$
- $v_{I,\sigma}(\neg\alpha)$ y $v_{I,\sigma}(\alpha * \beta)$ con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ se definen como en el caso proposicional
- $v_{I,\sigma}(\forall x\ \alpha) = T$ sii, para todo $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$

Semántica: Evaluación de una fórmula

Si $\sigma : Var \rightarrow D$ es una asignación y $d \in D$, $\sigma[x \leftarrow d]$ representa la asignación definida por

$$\sigma[x \leftarrow d](z) = \begin{cases} d & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si \; si } z \neq x \end{cases}$$

La evaluación $v_{I,\sigma}(\alpha)$ de una fórmula α respecto a I y σ se define como:

- $v_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = T$ sii $P_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) = T$
- $v_{I,\sigma}(\neg\alpha)$ y $v_{I,\sigma}(\alpha * \beta)$ con $* \in \{\wedge, \; \vee, \; \rightarrow, \; \leftrightarrow\}$ se definen como en el caso proposicional
- $v_{I,\sigma}(\forall x \; \alpha) = T$ sii, para todo $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$
- $v_{I,\sigma}(\exists x \; \alpha) = T$ sii, para algún $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$

Semántica: Evaluación de una fórmula

Si $\sigma : Var \rightarrow D$ es una asignación y $d \in D$, $\sigma[x \leftarrow d]$ representa la asignación definida por

$$\sigma[x \leftarrow d](z) = \begin{cases} d & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si si } z \neq x \end{cases}$$

La evaluación $v_{I,\sigma}(\alpha)$ de una fórmula α respecto a I y σ se define como:

- $v_{I,\sigma}(P(t_1, \ldots, t_n)) = T$ sii $P_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) = T$
- $v_{I,\sigma}(\neg\alpha)$ y $v_{I,\sigma}(\alpha * \beta)$ con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ se definen como en el caso proposicional
- $v_{I,\sigma}(\forall x\ \alpha) = T$ sii, para todo $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$
- $v_{I,\sigma}(\exists x\ \alpha) = T$ sii, para algún $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$

La evaluación de una fórmula α es F o T

$$v_{I,\sigma(\alpha)} \in \{F, T\} \text{ para toda fórmula } \alpha$$

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$,
Definimos una interpretación I con:

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1$,
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$,
Definimos una interpretación I con:

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1$,
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Evaluación de términos:

- $v_I(m) = m_I = 2$
- $v_I(sig(d)) = sig_I(v_I(d)) = sig_I(d_I) = sig_I(7) = 1$
- $v_I(min(sig(d), m)) = min_I(v_I(sig(d)), v_I(m)) = minimo\{1, 2\} = 1$

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$, con I

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1$,
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Para la fórmula $\alpha = \forall x\, ant(\ell, x)$:

$v_I(\alpha) = T$ porque,
para todo $n \in D$, $\ ant_I(\ell_I, n) = ant_I(1, n) = T$
(es decir, para todo $n \in D$, $1 \leq n$)

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$, con I

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1,$
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Para la fórmula $\alpha = \forall x\, ant(w, x)$:

$v_I(\alpha) = F$ porque,
para $n = 1 \in D$, $\ ant_I(3, n) = F$
(ya que $1 < 3$; podría tomarse también $n = 1$ o $n = 2$)

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$, con I

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1,$
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Para la fórmula $\alpha = \exists x\, ant(w, x)$:

$v_I(\alpha) = T$ porque,
para $n = 4,\ \ ant_I(3, n) = T$
(para $n = 4,\ \ 3 \leq n$. Podría considerarse $n = 4, 5, 6, 7$)

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un P-término es ground si no tiene variables

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un P-término es ground si no tiene variables

- Ejemplo: Dado el dominio $D = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$,
  $f(3,$ ⚄$)$ y $f(f($⚁$, x), 6)$ son P-términos

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un P-término es ground si no tiene variables

- Ejemplo: Dado el dominio $D = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$,
  $f(3,$ ⚄$)$ y $f(f($⚁$, x), 6)$ son P-términos

- Cualquier término, por ejemplo $f(3, y)$, es también un P-término.

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un P-término es ground si no tiene variables

- Ejemplo: Dado el dominio $D = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$,
  $f(3,$ ⚄$)$ y $f(f($⚁$, x), 6)$ son P-términos

- Cualquier término, por ejemplo $f(3, y)$, es también un P-término.

- Una sentencia es una fbf que no tiene variables libres.

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un P-término es ground si no tiene variables

- Ejemplo: Dado el dominio $D = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$,
  $f(3,$ ⚄$)$ y $f(f($⚁$, x), 6)$ son P-términos

- Cualquier término, por ejemplo $f(3, y)$, es también un P-término.

- Una sentencia es una fbf que no tiene variables libres.
  Una P-sentencia es una sentencia que admite P-términos en lugar de términos.

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (P-término) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un P-término es ground si no tiene variables

- Ejemplo: Dado el dominio $D = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}$, $f(3, \text{⚄})$ y $f(f(\text{⚁}, x), 6)$ son P-términos

- Cualquier término, por ejemplo $f(3, y)$, es también un P-término.

- Una sentencia es una fbf que no tiene variables libres.
  Una P-sentencia es una sentencia que admite P-términos en lugar de términos.

- Ejemplo: $\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x, \text{⚃})))$

Semántica de sentencias

- Si α es un P-término ground, la evaluación $v_I(\alpha)$ de α con respecto a una interpretación I se define como:
  - $v_I(c) = c_I$ para cualquier constante c

Semántica de sentencias

- Si α es un P-término ground, la evaluación $v_I(\alpha)$ de α con respecto a una interpretación I se define como:
  - $v_I(c) = c_I$ para cualquier constante c
  - $v_I(d) = d$ para cualquier elemento del dominio $d \in D$

Semántica de sentencias

- Si α es un P-término ground, la evaluación $v_I(\alpha)$ de α con respecto a una interpretación I se define como:
  - $v_I(c) = c_I$ para cualquier constante c
  - $v_I(d) = d$ para cualquier elemento del dominio $d \in D$
  - $v_I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_I(v_I(t_1), \ldots, v_I(t_n))$

Semántica de sentencias

- Si α es un P-término ground, la evaluación $v_I(\alpha)$ de α con respecto a una interpretación I se define como:
  - $v_I(c) = c_I$ para cualquier constante c
  - $v_I(d) = d$ para cualquier elemento del dominio $d \in D$
  - $v_I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_I(v_I(t_1), \ldots, v_I(t_n))$

- Una interpretación I satisface una P-sentencia α, escrito $I \models, \alpha$ cuando:
  - $I \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sii $P_I(v_I(t_1), \ldots, v_I(t_n)) = T$
  - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ como en el caso proposicional
  - $I \models \forall x\ \alpha$ sii $I \models \alpha[x/d]$ para todo $d \in D$
  - $I \models \exists x\ \alpha$ sii $I \models \alpha[x/d]$ para algún $d \in D$

Semántica de sentencias

- Ejemplo. $\forall x\ (Even(x) \rightarrow \neg Even(x+1))$. Sea I:
    - $D = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
    - $1_I = ⚀, 2_I = ⚁, 3_I = ⚂, 4_I = ⚃, 5_I = ⚄, 6_I = ⚅$
    - $d +_I e$ es el resultado de $(d + e - 1) \mod 6 + 1$ usando d, e como los valores númericos en los dados. Por ejemplo: $⚂ +_I ⚃ = ⚀$
    - $Even_I(d) = \{\langle ⚁ \rangle, \langle ⚃ \rangle, \langle ⚅ \rangle\}$

Semántica de sentencias

- Ejemplo. $\forall x\ (Even(x) \rightarrow \neg Even(x+1))$. Sea I:
  - $D = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
  - $1_I = ⚀, 2_I = ⚁, 3_I = ⚂, 4_I = ⚃, 5_I = ⚄, 6_I = ⚅$
  - $d +_I e$ es el resultado de $(d + e - 1) \mod 6 + 1$ usando d, e como los valores númericos en los dados. Por ejemplo: $⚂ +_I ⚃ = ⚀$
  - $Even_I(d) = \{\langle ⚁ \rangle, \langle ⚃ \rangle, \langle ⚅ \rangle\}$

$$
\begin{aligned}
& I \models \forall x\ (Even(x) \rightarrow \neg Even(x+1)) \\
\text{sii}\quad & I \models Even(⚀) \rightarrow \neg Even(⚀ + 1) \\
\text{and}\quad & I \models Even(⚁) \rightarrow \neg Even(⚁ + 1) \\
\text{and}\quad & I \models Even(⚂) \rightarrow \neg Even(⚂ + 1) \\
\text{and}\quad & I \models Even(⚃) \rightarrow \neg Even(⚃ + 1) \\
\text{and}\quad & I \models Even(⚄) \rightarrow \neg Even(⚄ + 1) \\
\text{and}\quad & I \models Even(⚅) \rightarrow \neg Even(⚅ + 1)
\end{aligned}
$$

Semántica de sentencias

- **Ejemplo**. $\forall x\ (Even(x) \rightarrow \neg Even(x+1))$.

$$
\begin{aligned}
& I \models Even(\text{⚀}) \rightarrow \neg Even(\text{⚀}+1) \\
\text{sii}\quad & I \not\models Even(\text{⚀}) \text{ or } I \models \neg Even(\text{⚀}+1) \\
\text{sii}\quad & \langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚀} +_I 1_I \rangle \notin Even_I \\
\text{sii}\quad & \langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚀} +_I \text{⚀} \rangle \notin Even_I \\
\text{sii}\quad & \underbrace{\langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I}_{\text{true}} \text{ or } \langle \text{⚁} \rangle \notin Even_I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& I \models Even(\text{⚅}) \rightarrow \neg Even(\text{⚅}+1) \\
\text{sii}\quad & I \not\models Even(\text{⚅}) \text{ or } I \models \neg Even(\text{⚅}+1) \\
\text{sii}\quad & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚅} +_I 1_I \rangle \notin Even_I \\
\text{sii}\quad & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚅} +_I \text{⚀} \rangle \notin Even_I \\
\text{sii}\quad & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \underbrace{\langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I}_{\text{true}}
\end{aligned}
$$

Semántica

- **Ejemplo.** $\forall x\ (Even(x) \to \neg Even(x+1))$.

$$
\begin{array}{ll}
 & I \models Even(\text{⚅}) \to \neg Even(\text{⚅} + 1) \\
\text{sii} & I \not\models Even(\text{⚅}) \text{ or } I \models \neg Even(\text{⚅} + 1) \\
\text{sii} & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚅} +_I 1_I \rangle \notin Even_I \\
\text{sii} & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚅} +_I \text{⚀} \rangle \notin Even_I \\
\text{sii} & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \underbrace{\langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I}_{\text{true}}
\end{array}
$$

Propiedades de los cuantificadores

Las siguientes fórmulas son tautologías:

- De Morgan:

$$\neg\forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$$
$$\neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

Propiedades de los cuantificadores

Las siguientes fórmulas son tautologías:

- De Morgan:

$$\neg\forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$$
$$\neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

- El cuantificador universal es más fuerte $\forall x\ A(x) \to \exists x\ A(x)$

Propiedades de los cuantificadores

Las siguientes fórmulas son tautologías:

- De Morgan:

$$\neg\forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$$
$$\neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

- El cuantificador universal es más fuerte $\forall x\ A(x) \to \exists x\ A(x)$
- Anidamiento de cuantificadores:

$$\forall x \forall y\ A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\exists x \exists y\ A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y)$$
$$\exists x \forall y\ A(x,y) \to \forall y \exists x A(x,y)$$

Propiedades de los cuantificadores

Las siguientes fórmulas son tautologías:

- De Morgan:

$$\neg\forall x\ A(x) \equiv \exists x\ \neg A(x)$$
$$\neg\exists x\ A(x) \equiv \forall x\ \neg A(x)$$

- El cuantificador universal es más fuerte $\forall x\ A(x) \to \exists x\ A(x)$
- Anidamiento de cuantificadores:

$$\forall x \forall y\ A(x,y) \equiv \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\exists x \exists y\ A(x,y) \equiv \exists y \exists x A(x,y)$$
$$\exists x \forall y\ A(x,y) \to \forall y \exists x A(x,y)$$

Cuidado: en el caso general $\forall x \exists y\ A(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\ A(x,y)$

Propiedades de los cuantificadores

- Disyunción

$$
\begin{array}{rcl}
\exists x\ A(x) \lor \exists x\ B(x) & \equiv & \exists x \big(A(x) \lor B(x)\big) \\
\forall x\ A(x) \lor \forall x\ B(x) & \rightarrow & \forall x \big(A(x) \lor B(x)\big) \\
\exists x\ A(x) \lor C & \equiv & \exists x \big(A(x) \lor C\big) \\
\forall x\ A(x) \lor C & \equiv & \forall x \big(A(x) \lor C\big)
\end{array}
$$

con x no libre en C.

Propiedades de los cuantificadores

- Disyunción

$$\begin{aligned}
\exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x) &\equiv \exists x\big(A(x) \vee B(x)\big) \\
\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x) &\rightarrow \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big) \\
\exists x\ A(x) \vee C &\equiv \exists x\big(A(x) \vee C\big) \\
\forall x\ A(x) \vee C &\equiv \forall x\big(A(x) \vee C\big)
\end{aligned}$$

con x no libre en C.

- Conjunción

$$\begin{aligned}
\forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x) &\equiv \forall x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \\
\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) &\rightarrow \exists x\ A(x) \wedge \exists x\ B(x) \\
\exists x\ A(x) \wedge C &\equiv \exists x\big(A(x) \wedge C\big) \\
\forall x\ A(x) \wedge C &\equiv \forall x\big(A(x) \wedge C\big)
\end{aligned}$$

con x no libre in C.

Propiedades de los cuantificadores

- Implicación

$$
\begin{array}{rcl}
\forall x \ \big(C \to A(x)\big) & \equiv & C \to \forall x \ A(x) \\
\forall x \ \big(A(x) \to C\big) & \equiv & \exists x \ A(x) \to C \\
\exists x \ (A(x) \to B(x)) & \equiv & \forall x A(x) \to \exists x \ B(x) \\
\forall x \ (A(x) \to B(x)) & \to & \big(\forall x \ A(x) \to \forall x \ B(x)\big) \\
\forall x \ (A(x) \to B(x)) & \to & \big(\forall x \ A(x) \to \exists x \ B(x)\big) \\
\forall x \ (A(x) \to B(x)) & \to & \big(\exists x \ A(x) \to \exists x \ B(x)\big) \\
\big(\exists x \ B(x) \to \forall x \ A(x)\big) & \to & \forall x \ \big(A(x) \to B(x)\big)
\end{array}
$$

con x no libre in C.

Propiedades de los cuantificadores

- Equivalencia

$$
\begin{aligned}
\forall x\ (A(x) \equiv B(x)) \quad &\rightarrow \quad (\forall x\ A(x) \equiv \forall x\ B(x)) \\
\forall x\ (A(x) \equiv B(x)) \quad &\rightarrow \quad (\exists x\ A(x) \equiv \exists x\ B(x))
\end{aligned}
$$

Propiedades de los cuantificadores

- Equivalencia

$$
\begin{aligned}
\forall x \ (A(x) \equiv B(x)) \quad &\rightarrow \quad (\forall x \ A(x) \equiv \forall x \ B(x)) \\
\forall x \ (A(x) \equiv B(x)) \quad &\rightarrow \quad (\exists x \ A(x) \equiv \exists x \ B(x))
\end{aligned}
$$

- Sustituciones:

$$
\begin{aligned}
A(c) \quad &\rightarrow \quad \exists x \ A(x) \\
\forall x \ A(x) \quad &\rightarrow \quad A(c)
\end{aligned}
$$

donde $A(c)$ denota $A(x)[x/c]$

Propiedades de los cuantificadores

- Equivalencia

$$\begin{array}{rcl} \forall x\ (A(x) \equiv B(x)) & \rightarrow & (\forall x\ A(x) \equiv \forall x\ B(x)) \\ \forall x\ (A(x) \equiv B(x)) & \rightarrow & (\exists x\ A(x) \equiv \exists x\ B(x)) \end{array}$$

- Sustituciones:

$$\begin{array}{rcl} A(c) & \rightarrow & \exists x\ A(x) \\ \forall x\ A(x) & \rightarrow & A(c) \end{array}$$

  donde $A(c)$ denota $A(x)[x/c]$

- Regla de generalización

$$\frac{A}{\forall x\ A}$$

Del lenguaje natural al lenguaje formal ...

- Cuantificador universal: ¡cuidado! normalmente conlleva una implicación implícita. Ejemplo: "Todo caballo salvaje come hierba"

Del lenguaje natural al lenguaje formal ...

- Cuantificador universal: ¡cuidado! normalmente conlleva una implicación implícita. Ejemplo: "Todo caballo salvaje come hierba"
  $\forall x \ \big(Caballo(x) \wedge Salvaje(x) \rightarrow Come(x, Hierba)\big)$
- Sin embargo, la versión existencial corresponde a una conjunción implícita:
  "Algún caballo salvaje come hierba"

Del lenguaje natural al lenguaje formal ...

- Cuantificador universal: ¡cuidado! normalmente conlleva una implicación implícita. Ejemplo: "Todo caballo salvaje come hierba"
  $\forall x\ \big(Caballo(x) \land Salvaje(x) \rightarrow Come(x, Hierba)\big)$
- Sin embargo, la versión existencial corresponde a una conjunción implícita:
  "Algún caballo salvaje come hierba"
  $\exists x\ \big(Caballo(x) \land Salvaje(x) \land Come(x, Hierba)\big)$

Del lenguaje natural al lenguaje formal ...

- Cuantificador universal: ¡cuidado! normalmente conlleva una implicación implícita. Ejemplo: "Todo caballo salvaje come hierba"
  $\forall x \ \big(\mathit{Caballo}(x) \land \mathit{Salvaje}(x) \rightarrow \mathit{Come}(x, \mathit{Hierba})\big)$
- Sin embargo, la versión existencial corresponde a una conjunción implícita:
  "Algún caballo salvaje come hierba"
  $\exists x \ \big(\mathit{Caballo}(x) \land \mathit{Salvaje}(x) \land \mathit{Come}(x, \mathit{Hierba})\big)$
- Otras formas de decir $\forall$:
  - "Cualquier/Todo/Cada número par es un múltiplo de dos"
  - "Los números pares son múltiplos de dos"
  - "Un número par es un múltiplo de dos"

Del lenguaje natural al lenguaje formal . . .

- Otras formas de decir ∃:
  - "Algún número par es un múltiplo de tres"
  - "Hay un(algún número par múltiplo de tres"
  - "Al menos un número par es múltiplo de tres"

Del lenguaje natural al lenguaje formal . . .

- Otras formas de decir $\exists$:
  - "Algún número par es un múltiplo de tres"
  - "Hay un(algún número par múltiplo de tres"
  - "Al menos un número par es múltiplo de tres"
- Cuidado al combinar cuantificadores con negación:
  - "Todos los enteros no son primos"
  - "Todos los enteros son no-primos"
  - "No todos los enteros son primos"

Tablas Semánticas

- Además de las reglas de desdoblamiento vistas en Lógica Proposicional, añadimos las siguientes para desdoblar cuantificadores:

Formula	Rama 1	Rama 2
$\forall x \alpha$	$\alpha[x/t]$	
$\exists x \alpha$	$\alpha[x/c]$	
$\neg\forall x \alpha$	$\exists x \neg\alpha$	
$\neg\exists x \alpha$	$\forall x \neg\alpha$	

donde t es cualquier término sin variables y c tiene que ser una constante nueva que no existía hasta ahora en la tabla actual.

Tablas Semánticas

- Además de las reglas de desdoblamiento vistas en Lógica Proposicional, añadimos las siguientes para desdoblar cuantificadores:

Formula	Rama 1	Rama 2
$\forall x \alpha$	$\alpha[x/t]$	
$\exists x \alpha$	$\alpha[x/c]$	
$\neg \forall x \alpha$	$\exists x \neg \alpha$	
$\neg \exists x \alpha$	$\forall x \neg \alpha$	

  donde t es cualquier término sin variables y c tiene que ser una constante nueva que no existía hasta ahora en la tabla actual.

- Además: una fórmula $\forall x \alpha$ se mantiene permanentemente activa. Esto es, la primera regla de arriba nunca marca $\forall x \alpha$ como "usada".

Tablas Semánticas

- Ejemplos:

$$\models \exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)$$
$$\models \forall x\ P(x) \to \exists x\ (\neg P(x) \vee \neg P(f(x)))$$
$$\models \forall x\ P(x) \vee \forall x\ \neg P(x)$$
$$\{\exists x\ P(x)\} \models \exists x\ \neg P(x)$$
$$\{\forall x\ \exists y\ P(x,y)\} \models P(a,a)$$

Tablas Semánticas

- Ejemplos:

$$\models \exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)$$
$$\models \forall x\ P(x) \to \exists x\ (\neg P(x) \vee \neg P(f(x)))$$
$$\models \forall x\ P(x) \vee \forall x\ \neg P(x)$$
$$\{\exists x\ P(x)\} \models \exists x\ \neg P(x)$$
$$\{\forall x\ \exists y\ P(x,y)\} \models P(a,a)$$

- Problema: no existe método general para decidir si una rama abierta es infinita o se termina cerrando en algún punto

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y))$$

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists x\ \forall y\ P(x,y)$$

$$|$$

$$\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y)$$

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists x\ \forall y\ P(x,y)$$

$$|$$

$$\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)$$

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists x\ \forall y\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)$$

$$|$$

$$\forall y\ P(a,y)$$

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y)) \quad \checkmark$$

$$\exists x\ \forall y\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y) \quad \checkmark$$

$$\forall y\ P(a,y)$$

$$\forall x\ \neg P(x,b)$$

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \to \forall y\ \exists x\ P(x,y)) \quad \checkmark$$

$$\exists x\ \forall y\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y) \quad \checkmark$$

$$\forall y\ P(a,y)$$

$$\forall x\ \neg P(x,b)$$

$$P(a,b)$$

Tablas Semánticas

$$\neg(\exists x\ \forall y\ P(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ P(x,y)) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists x\ \forall y\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\neg\forall y\ \exists x\ P(x,y) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y) \quad \checkmark$$

$$|$$

$$\forall y\ P(a,y)$$

$$|$$

$$\forall x\ \neg P(x,b)$$

$$|$$

$$P(a,b)$$

$$|$$

$$\neg P(a,b)$$

$$*$$