Tema 1:
Lógica Proposicional

Lógica-GIA

Curso 2024–2025

Tema 1: Lógica Proposicional

Curso 2024–2025

Lógica

Grado en Inteligencia Artificial

Felicidad Aguado, Pedro Cabalar, Gilberto Pérez, Concepción Vidal

Introducción

- A veces llamada el cálculo de la informática porque proporciona un soporte matemático para tratar con información y razonar sobre el comportamiento de los programas.
- En Computación, las reglas de la lógica se usan en el diseño, desarrollo, verificación y mantenimiento de programas informáticos.
- La lógica trata de la formalización del lenguaje y los métodos de razonamiento.
- La lógica proporciona técnicas para determinar si un argumento (razonamiento) es válido o no.

Lógica Proposicional: Proposiciones

Definición

Una *proposición* *o enunciado es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.*
Le asignaremos uno y sólo uno de los valores de verdad: verdadero (1) *o falso* (0).

Lógica Proposicional: Proposiciones

Definición

Una ***proposición*** *o enunciado es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.*
Le asignaremos uno y sólo uno de los valores de verdad: verdadero (1) *o falso* (0).

Son proposiciones:

- Los triángulos tienen cuatro vértices (0)
- Pedro Almodóvar es el director de La guerra de las galaxias (0)
- $2 + 2 = 4$ (1)
- $2 + 4 = 7$ (0)

Lógica Proposicional: Proposiciones

Definición

Una proposición *o enunciado es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.*
Le asignaremos uno y sólo uno de los valores de verdad: verdadero (1) *o falso* (0)*.*

No son proposiciones:

- Ojalá que haga sol este fin de semana.
- ¿A qué hora vamos al cine?
- $x + 4 = 10$.

Operadores Lógicos: Sintaxis

Hay proposiciones simples y proposiciones compuestas

Definición

Una proposición simple (o primitiva o atómica) es aquella que no hay forma de descomponerla en otra más sencilla. Es frecuente llamarlas átomos. Un conjunto de átomos se llama signatura At.

Pondremos $p, q, r, \ldots$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Para obtener las proposiciones compuestas se utilizan los conectivos u operadores lógicos:

$$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

- **Negación** ($\neg$) Si p es una proposición, la negación de p se denota por $\neg p$ y se lee:

  "no p" "no ocurre p" "no es cierto p"

- **Conjunción** ($\wedge$) Si p y q son proposiciones, la conjunción de p y q se denota por $p \wedge q$ y se lee:

  "p y q" "p, no obstante q" "p, pero q"
  "p, sin embargo q" "p, q" "p, aunque q"

Operadores Lógicos: Sintaxis

- **Disyunción** ($\vee$) Si p y q son proposiciones, la disyunción de p y q se denota por $p \vee q$ y se lee:

  "p o q (o ambos)"
  "al menos p o q"
  "como mínimo p o q"
  "p a menos que q"
  "p a no ser que q"

- **Condicional** ($\rightarrow$) Si p y q son proposiciones, el condicional $p \rightarrow q$ se lee:

  "Si p, entonces q"
  "Si p, q"
  "p solo si q"
  "cuando p, entonces q"
  "p es suficiente para q"
  "q si p"
  "q siempre que p"
  "q cuando p"
  "q es necesario para p"
  "no p a no ser que q"
  "no p a menos que q"

Operadores Lógicos: Sintaxis

- **Bicondicional** ($\leftrightarrow$) Si p y q son proposiciones, el bicondicional $p \leftrightarrow q$ se lee:

  "p si, y solo si, q"

  "p es suficiente y necesario para q"

Operadores Lógicos: Sintaxis

Definición

Dada una signatura At, las reglas para construir una fórmula (bien formada) son:

1. $\top$ *y* $\perp$ *son f.b.f.*
2. *Los átomos son f.b.f.*
3. *Si* α *es una f.b.f.,* $\neg\alpha$ *es una f.b.f.*
4. *Si* α *y* β *son f.b.f., entonces* $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ *y* $\alpha \leftrightarrow \beta$ *son f.b.f.*
5. *No hay más reglas.*

El conjunto de fórmulas construidas con At es $\mathcal{L}_{At}$.
Una teoría $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{At}$ es un conjunto de fórmulas.

Operadores Lógicos: Sintaxis

OJO

Ejemplo

$p \to \neg q$ es una f.b.f., pero $p\neg \to q$ y $p \vee \wedge q$ no lo son.

- Se pueden usar paréntesis o corchetes,
- Si hay más de una conectiva en una fórmula, entenderemos que cada conectiva afecta a la letra proposicional inmediata o al conjunto de proposiciones inmediatas encerradas entre paréntesis.

$$\neg p \vee q \qquad\qquad \neg(p \vee q)$$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Jerarquía: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Ejemplo

- $p \rightarrow (q \wedge r)$ *puede escribirse como* $p \rightarrow q \wedge r$
- $p \rightarrow q \wedge \neg r$ *es* $p \rightarrow (q \wedge (\neg r))$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Jerarquía: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Los paréntesis a veces son necesarios

Ejemplo

$$\neg p \wedge (r \rightarrow t)$$

$\neg p \wedge r \rightarrow t$ *representa a* $(\neg p \wedge r) \rightarrow t$

Ejemplo

$$\neg p \wedge (q \vee r)$$

$\neg p \wedge q \vee r$ *representa a* $(\neg p \wedge q) \vee r$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Ejemplo

p: Me mareo, q: Voy en coche

- *"Me mareo si voy en coche"*
  Ir en coche es suficiente para que me maree

$$q \rightarrow p$$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Ejemplo

p: *Me mareo*, q: *Voy en coche*

- *"Me mareo si voy en coche"*
  Ir en coche es suficiente para que me maree

$$q \rightarrow p$$

- *"Me mareo solo si voy en coche"*
  Ir en coche es necesario para que me maree

$$p \rightarrow q$$

Operadores Lógicos: Semántica

Partimos de

$$I : At \to \{0, 1\}$$

I se denomina interpretación

- Si $I(p) = 0$, p es falsa
- Si $I(p) = 1$, p es verdadera

Identificamos I con $\{p \in At \ ; \ I(p) = 1\}$

Ejemplo

Si $At = \{p, q, r, s\}$, *entonces*

- *Si* $I = \{p, q\}$, $I(p) = I(q) = 1$, $I(r) = I(s) = 0$
- *Si* $I = \{r\}$, $I(r) = 1$, $I(p) = I(q) = I(s) = 0$
- *Si* $I = \{p, q, r, s\}$, $I(p) = I(q) = I(r) = I(s) = 1$
- *Si* $I = \emptyset$, $I(p) = I(q) = I(r) = I(s) = 0$

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \to \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- $\perp$ es siempre falsa y $\top$ es siempre verdadera.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \to \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- $\bot$ es siempre falsa y $\top$ es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \to \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- $\perp$ es siempre falsa y $\top$ es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \to \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- $\perp$ es siempre falsa y $\top$ es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.
- La **disyunción** $p \vee q$ es falsa cuando tanto p como q son falsas, y verdadera en cualquier otro caso.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \to \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- $\bot$ es siempre falsa y $\top$ es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.
- La **disyunción** $p \vee q$ es falsa cuando tanto p como q son falsas, y verdadera en cualquier otro caso.
- El **condicional** $p \to q$ es falso cuando p es verdadera y q es falsa, y verdadero en cualquier otro caso.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \to \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- $\bot$ es siempre falsa y $\top$ es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.
- La **disyunción** $p \vee q$ es falsa cuando tanto p como q son falsas, y verdadera en cualquier otro caso.
- El **condicional** $p \to q$ es falso cuando p es verdadera y q es falsa, y verdadero en cualquier otro caso.
- El **bicondicional** $p \leftrightarrow q$ es verdadero cuando p y q tienen los mismos valores de verdad, y falso en los otros casos.

Semántica: Tablas de verdad

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Semántica: Tablas de verdad

Dada una fórmula $\alpha : (p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$,
α es verdadera o falsa dependiendo del valor de verdad de $\{p, q\}$.

- Si $I(p) = I(q) = 1$, α es falsa

- $I(p) = 1$, $I(q) = 0$, α es verdadera

α admite 2^2 interpretaciones ($I : \{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$).

Semántica: Tablas de verdad

Definición

Una ***tabla de verdad*** *para una fórmula α es un método que proporciona los valores de verdad de α, a partir de los valores de verdad de $At(\alpha)$.*

$$At(\alpha) = \{p \in At \;;\; p \text{ aparece en } \alpha\}$$

Ejemplo

La tabla de verdad de $(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$ es:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \vee q) \quad \wedge \quad (p \to \neg q)$
0	0	0	1	1	**0**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	1	0	0	**0**

Semántica: Tablas de verdad

Cada fila de la tabla de verdad de α es una interpretación de α

Si $|At(\alpha)| = n$, la tabla tiene 2^n interpretaciones (exponencial!)

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \vee q) \quad \wedge \quad (p \to \neg q)$
0	0	0	1	1	**0**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	1	0	0	**0**

Semántica: Tablas de verdad

Una interpretación $I : At \to \{0,1\}$ se puede extender a $I : \mathcal{L}_{At} \to \{0,1\}$:

- $I \not\models \bot$, $I \models \top$
- $I \models p$ si $I(p) = 1$ para $p \in At$
- $I \models \neg\alpha$ si $I \not\models \alpha$
- $I \models \alpha \wedge \beta$ si $I \models \alpha$ e $I \models \beta$
- $I \models \alpha \vee \beta$ si $I \models \alpha$ o $I \models \beta$
- $I \models \alpha \to \beta$ si $I \not\models \alpha$ o $I \models \beta$
- $I \models \alpha \leftrightarrow \beta$ si ($I \models \alpha$ e $I \models \beta$) o ($I \not\models \alpha$ e $I \not\models \beta$)

$$\boxed{I(\alpha) := 1 \text{ si } I \models \alpha}$$

- Si $I(\alpha) = 1$ o $I \models \alpha$, I se llama modelo de α
- Si $I(\alpha) = 0$ o $I \not\models \alpha$, I se llama contraejemplo (o contramodelo) de α

Semántica

Sea $At = \{p, q\}$

$$M(\alpha) = \{ \text{ modelos de } \alpha\}$$

- $M(\bot) = \emptyset$ y $M(\top) = 2^{At} = \mathcal{P}(At)$
- $M(p) = \{\{p\}, \{p, q\}\}$
- $M(\neg p) = \{\{\}, \{q\}\}$ $(\{\} = \emptyset)$
- $M(p \wedge q) = \{\{p, q\}\}$
- $M(p \vee q) = \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$
- $M(p \to q) = \{\{\}, \{q\}, \{p, q\}\}$

Semántica

Definición

Dadas dos fórmulas α y β, se dice que α es más fuerte que β (o β es más débil que α) si $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$

- $M(q) = \{\{q\}, \{p, q\}\}$
- $M(p \wedge q) = \{\{p, q\}\}$
- $M(p \vee q) = \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$
- $M(p \to q) = \{\{\}, \{q\}, \{p, q\}\}$
- $M(p \leftrightarrow q) = \{\{\}, \{p, q\}\}$
- q es más fuerte que $p \vee q$ y que $p \to q$
- $p \leftrightarrow q$ es más fuerte que $p \to q$ y que $q \to p$
- $p \wedge q$ es más fuerte que q y que $p \vee q$

Semántica

Dada una fórmula α:

- α es una tautología si $M(\alpha) = 2^{At}$ (solo tiene modelos)

$$\top\,,\ \neg p \vee p \text{ y } \neg\alpha \vee \alpha$$

- α es una contradicción si $M(\alpha) = \emptyset$ (solo tiene contramodelos)

$$\bot\,,\ \neg p \wedge p \text{ y } \neg\alpha \wedge \alpha$$

- α es una contingencia si tiene modelos y contramodelos

$$(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$$

- α es satisfacible si $M(\alpha) \neq \emptyset$ (admite algún modelo)

Semántica

Una fórmula α es satisfacible si $M(\alpha) \neq \emptyset$ (admite algún modelo).

Definición

El conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es satisfacible (o consistente) si la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ es satisfacible.
Existe un modelo común para todas las α_i $(1 \leq i \leq n)$
El conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es insatisfacible (o inconsistente) si la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ no es satisfacible.
No existe un modelo común para todas las α_i $(1 \leq i \leq n)$

$\{p \wedge \neg q, \neg p \to q\}$ es consistente
$\{p \wedge \neg q, p \to q\}$ es inconsistente

Equivalencias lógicas

Definición

Dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes si, para cada interpretación, ambas tienen los mismos valores de verdad (es decir, la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) = M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \equiv \beta$$

Equivalencias lógicas

Definición

Dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes si, para cada interpretación, ambas tienen los mismos valores de verdad (es decir, la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) = M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \equiv \beta$$

También puede denotarse por $\alpha \iff \beta$.

Equivalencias lógicas

Definición

Dos fórmulas α y β son lógicamente equivalentes si, para cada interpretación, ambas tienen los mismos valores de verdad (es decir, la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) = M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \equiv \beta$$

También puede denotarse por $\alpha \iff \beta$.
Es importante diferenciar "$\equiv$" de "$\leftrightarrow$"

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ✓ ($\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ es una tautología)
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ NO ($\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ no es una tautología)
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ✓ (es una fórmula bien formada)

Equivalencias lógicas

Ejemplo

$\neg(p \wedge q)$ *y* $\neg p \vee \neg q$ *son lógicamente equivalentes:*

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	1	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**

Equivalencias lógicas

Principales equivalencias lógicas	
Leyes Conmutativas	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Leyes Asociativas	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Leyes Distributivas	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Ley de la Doble Negación	$\neg\neg p \equiv p$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
Leyes de Dominación	$p \vee \top \equiv \top$ $p \wedge \bot \equiv \bot$
Leyes de Identidad	$p \wedge \top \equiv p$ $p \vee \bot \equiv p$
Leyes de la Negación	$p \vee \neg p \equiv \top$ $p \wedge \neg p \equiv \bot$
Ley de la Contraposición	$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$

Tabla: Tabla de equivalencias

Equivalencias lógicas

Principales equivalencias lógicas	
Leyes de la Implicación	$(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$ $\neg(p \to q) \equiv (p \land \neg q)$
Leyes de la Equivalencia	$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \land (q \to p)]$ $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
Leyes Idempotentes	$p \equiv (p \land p)$ $p \equiv (p \lor p)$
Leyes de Absorción	$p \land (p \lor q) \equiv p$ $p \lor (p \land q) \equiv p$
Ley de la Reducción al absurdo	$(p \to q) \equiv [(p \land \neg q) \to \bot]$

Tabla: Tabla de equivalencias

Equivalencias lógicas

Sea α una fórmula y β una subfórmula de α.

Ejemplo

$\alpha : \neg(p \vee q) \to r$ y $\beta : \neg(p \vee q)$

Si $\beta \equiv \beta^*$, y sustituimos alguna ocurrencia de β en α por β^*, obtenemos α^* y $\alpha^* \equiv \alpha$.

Equivalencias lógicas

Sea α una fórmula y β una subfórmula de α.

Ejemplo

$\alpha : \neg(p \vee q) \to r$ y $\beta : \neg(p \vee q)$

Si $\beta \equiv \beta^*$, y sustituimos alguna ocurrencia de β en α por β^*, obtenemos α^* y $\alpha^* \equiv \alpha$.

Ejemplo

Como $\beta : \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, *entonces:*

$$\neg(p \vee q) \to r \equiv \neg p \wedge \neg q \to r$$

Equivalencias lógicas

Ejemplo

$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	*Ley de la implicación*
	$\equiv$	$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$	*Ley distributiva*
	$\equiv$	$\perp \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee \perp$	*Ley de la negación*
	$\equiv$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$	*Ley Identidad*

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α implica lógicamente una fórmula β si $\alpha \to \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β es consecuencia lógica de α, que α es más fuerte que β o que β es más débil que α.

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α *implica lógicamente una fórmula* β *si* $\alpha \to \beta$ *es una tautología). Equivalentemente,* $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$*. Esta situación se representa por*

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β *es consecuencia lógica de* α*, que* α *es más fuerte que* β *o que* β *es más débil que* α*.*

- $p \models p \vee q$
- $p \wedge q \models p$
- $p \wedge q \models p \vee q$

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α *implica lógicamente una fórmula* β *si* $\alpha \to \beta$ *es una tautología). Equivalentemente,* $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$*. Esta situación se representa por*

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β *es consecuencia lógica de* α*, que* α *es más fuerte que* β *o que* β *es más débil que* α*.*

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α implica lógicamente una fórmula β si $\alpha \to \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β es consecuencia lógica de α, que α es más fuerte que β o que β es más débil que α.

Es importante diferenciar "$\models$" de "$\to$"

- $p \to p \wedge q$ ✓ (es una fórmula bien formada)
- $p \models p \wedge q$ NO ($p \to p \wedge q$ no es una tautología)
- $p \models p \vee q$ ✓ ($p \to p \vee q$ es una tautología)

Implicaciones lógicas

Principales implicaciones lógicas	
Modus Ponens	$[(p \to q) \wedge p] \models q$
Modus Tollens	$[(p \to q) \wedge \neg q] \models \neg p$
Silogismo	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \models (p \to r)$
Leyes de Simplificación	$(p \wedge q) \models p$ $(p \wedge q) \models q$
Leyes de Adición	$p \models (p \vee q)$ $q \models (p \vee q)$
Silogismo Disyuntivo	$((p \vee q) \wedge \neg p) \models q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \models p$
Ley de Casos	$[(p \to q) \wedge (\neg p \to q)] \models q$
Ley de Inconsistencia	$[p \wedge \neg p] \models q$

Tabla: Tabla de implicaciones lógicas

Argumentos y Razonamientos válidos

Definición

Dado un conjunto de proposiciones $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *y una proposición* C *se dice que el argumento* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \models C$ *es válido si*

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \models C$$

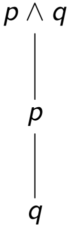
Las proposiciones $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *se llaman hipótesis o premisas y* C *se llama conclusión. El argumento es válido si, siempre que todas las hipótesis son verdaderas, también lo es la conclusión.*

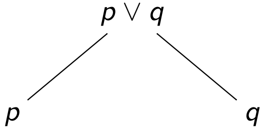
Tablas semánticas

Para decidir si una fórmula α es satisfacible (o si un conjunto de fórmulas es consistente o inconsistente), se puede utilizar una tabla semántica.
Para construirla se determinan los valores de verdad de las subfórmulas de α desde las más sencillas hasta las más complejas.

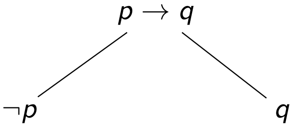
Tablas semánticas

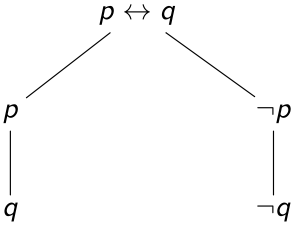
Se construye un árbol donde los nodos (finitos) son las proposiciones.
Partiendo de:





Representamos $p \to q$ y $p \leftrightarrow q$ como:





Tablas semánticas

- Queremos comprobar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es consistente
- Representamos $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$
- Si en una sucesión de nodos del árbol, (camino), aparece una proposición y su negación, se dice que es un camino cerrado y se marca con $*$.
  - Si al finalizar todos los caminos se cierran, la proposición $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ es una contradicción o el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es inconsistente
  - Si al finalizar algún camino no se cierra, ese camino es un modelo de $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ y el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es consistente

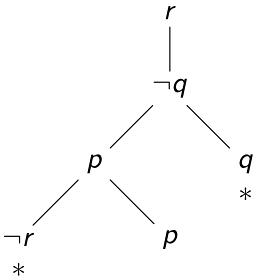
Tablas semánticas: Ejemplo

- Queremos comprobar si $\{r \rightarrow p, r, \neg q, \neg p \rightarrow q\}$ es consistente
- Representamos $(r \rightarrow p) \wedge r \wedge \neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)$

Tablas semánticas: Ejemplo

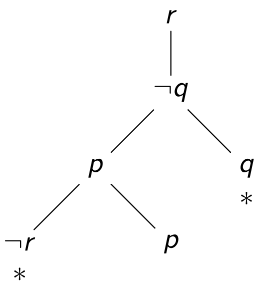
- Queremos comprobar si $\{r \to p, r, \neg q, \neg p \to q\}$ es consistente
- Representamos $(r \to p) \wedge r \wedge \neg q \wedge (\neg p \to q)$

$$\neg p \to q \equiv p \vee q$$



Tablas semánticas: Ejemplo

$$\neg p \to q \equiv p \vee q$$



- Al final del proceso queda un camino abierto
- $I = \{p, r\}$ ($I(p) = I(r) = 1, I(q) = 0$) es un modelo de $(r \to p) \wedge r \wedge \neg q \wedge (\neg p \to q)$
- $\{r \to p, r, \neg q, \neg p \to q\}$ es consistente

Argumentos y Razonamientos válidos

¿El argumento $\{p \to q, p\} \models q$ es válido?

Argumentos y Razonamientos válidos

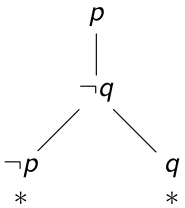
¿El argumento $\{p \to q, p\} \models q$ es válido?

¿La fórmula $(p \to q) \wedge p \wedge \neg q$ es una contradicción?

Argumentos y Razonamientos válidos

¿El argumento $\{p \to q, p\} \models q$ es válido?

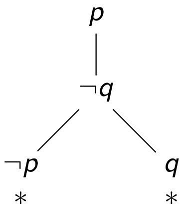
¿La fórmula $(p \to q) \wedge p \wedge \neg q$ es una contradicción?



Argumentos y Razonamientos válidos

¿El argumento $\{p \to q, p\} \models q$ es válido?

¿La fórmula $(p \to q) \wedge p \wedge \neg q$ es una contradicción?



Son equivalentes:

- $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \models C$ es válido
- $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \to C$ es una tautología
- $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ es una contradicción
- El conjunto $\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C\}$ es inconsistente