Soluciones a los ejercicios II

1. La respuesta es el coeficiente de grado 35 de:
a) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^5$, b) $(x + x^2 + x^3 + \dots)^5$,
c) $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^5$ d) $(x^{10} + x^{11} + x^{12} + \dots) \times (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^4$

2. La respuesta es el coeficiente de grado n de:
a) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \times (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots)$
b) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \times (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots) \times (1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \dots)$

3. La respuesta es el coeficiente de grado 31 de $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3 \times (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9 + x^{10})$

4. a) $(1 + x)^8$; b) $8(1 + x)^7$; c) $1/(1 + x)$; d) $x^3/(1 - x)$; e) $6x^3/(1 + x)$; f) $1/(1 - x^2)$;
g) $1/(1 - 2x)$; h) $x^2/(1 - ax)$.

5. a) $g(x) = f(x) - (a_3 - 3)x^3$; b) $g(x) = f(x) - (a_3 - 3)x^3 - (a_7 - 7)x^7$;
c) $g(x) = 2\,f(x) + (1 - 2a_1)x + (3 - 2a_3)x^3$;
d) $g(x) = 2\,f(x) + (5/1 - x) - (2a_1 + 4)x - (2a_3 + 2)x^3 + (2 - 2a_7)x^7$.

6. a) $\binom{13}{8}$; b) $\binom{14}{10} - \binom{5}{1} \times \binom{9}{5} + \binom{5}{2} = 381$.

7. a) 0; b) $\binom{14}{12} - 5 \times \binom{16}{14}$; c) $\binom{18}{15} + 4 \times \binom{17}{14} + 6 \times \binom{16}{13} + 4 \times \binom{15}{12} + \binom{14}{11}$.

8. a) $\binom{15}{12}$; b) $\binom{15}{12} - 4 \times \binom{8}{5}$.

9. $\binom{99}{96} - 4 \times \binom{64}{61} + 6 \times \binom{29}{26}$.

10. $\frac{1}{8}(1 + (-1)^n) + \frac{1}{4}\binom{n+1}{n} + \frac{1}{2}\binom{n+2}{n}$.

11. $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1} = (1 - (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6))^{-1} = 1 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 + \dots$

12. $\binom{44}{37}$

13. Denotemos por c_n la convolución de las sucesiones dadas.
a) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$ y $c_n = n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + (n - 4)$, para $n \geq 4$.
b) $c_n = (-1)^n \times (n + 1)$, para $n \geq 0$.
c) $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$, $c_4 = 6$, $c_5 = 5$, $c_6 = 3$ y $c_n = 0$, para $n \geq 7$.

14. Sea $p_d(n)$ el número de descomposiciones de n en sumandos distintos si $n > 0$ y $p_d(0) = 1$ y sea $p_0(n)$ el número de descomposiciones de n en sumandos impares si $n > 0$ y $p_0(0) = 1$. Denotaremos por $P_d(x)$ y $P_0(x)$ sus funciones generatrices. $P_d(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots$

$= \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)$. Por otra parte, $P_0(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots)(1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \ldots)\ldots = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^7} \ldots$

Ahora bien, como $1 + x^i = \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i}$, se obtiene que $P_0(x) = P_d(x)$.

15. Análogo al ejercicio 14.

16. $f(x) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1 + x^{2k+1} - x^{4k+2}}{1 - x^{4k+2}}\right)$.

17. a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^7} = \frac{1}{(1-x^2)\times(1-x^3)\times(1-x^5)\times(1-x^7)}$;
b) $g(x) = x^{67} \times f(x)$;
c) $h(x) = \left((x^4 + x^6 + x^8)(x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21})(x^{35} + x^{40} + x^{45} + x^{50})\,x^{70}\right)/(1 - x^7)$.

18. a) $f(x) = e^{-x}$; b) $f(x) = e^{2x}$; c) $f(x) = e^{-ax}$; d) $f(x) = e^{a2x}$; e) $f(x) = a\,e^{a2x}$; f) $f(x) = x\,e^{2x}$.

19. a) $a_n = 3^{n+1}$; b) $a_n = 6\,5^n - 3\,2^n$; c) $\{a_n\} = \{1, 1, 3, 1, 1, \ldots\}$;
d) $\{a_n\} = \{1, 9, 14, -10, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots\}$; e) $a_n = n!$; f) $a_n = 3\,2^n\, n! + 1$.

20. a) $f(x) = (1 + x)^2 (1 + x + (x^2/2!))^2$
b) $f(x) = (1 + x)(1 + x + (x^2/2!))(1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!) + (x^4/4!))^2$
c) $f(x) = (1 + x)^3 (1 + x + (x^2/2!))^4$

21. $f(x) =(1 + x)(1 + x + (x^2/2!))((x^2/2!) + (x^3/3!) + (x^4/4!))(1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!) + (x^4/4!))$

22. a) $p = (3^{20} + 1)/(2 \times 3^{20})$ b) $p = (3^{20} + 3)/(4 \times 3^{20})$ c) $p = (3^{20} - 1)/(2 \times 3^{20})$
d) $p = (3^{20} - 1)/(2 \times 3^{20})$ e) $p = (3^{20} + 1)/(2 \times 3^{20})$

23. $f(x) = x(1 + 4x + x^2)/(1 - x)^4$ es la función generatriz de la sucesión $\{a_k\} = \{k^3\}$. La solución es el coeficiente de grado n de $f(x)/(1 - x)$

24. a) $f(x) = 2x^2/(1 - x)^3$; b) $\sum_{i=0}^{n} i \times (i-1) = (n^3 - n)/3$.

25. Sea $\{b_n\}$ la sucesión generada por la función $g(x)$, $b_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.