MATEMATICA DISCRETA 2. Ejercicios III

1. Encuentra la solución general para cada una de las siguientes progresiones geométricas:
a) $a_{n+1} - 1{,}5\, a_n = 0$, $n \geq 0$; b) $4\, a_n - 5\, a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$;
c) $3\, a_{n+1} - 4\, a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_1 = 5$; d) $2\, a_n - 3\, a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_4 = 81$;

2. Si a_n, $n \geq 0$, es una solución de la relación de recurrencia $a_{n+1} - d\, a_n = 0$ y $a_3 = 153/49$, $a_5 = 1377/2401$, ¿cuánto vale d?

3. Hace quince años se invirtieron las ganancias de un negocio en una cuenta que pagaba un 8% de interés anual con pagos trimestrales. Si ahora el saldo de la cuenta es de 7.218,27 €, ¿cuál fue la inversión inicial?

4. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ una lista de números reales distintos que deben ordenarse mediante el método de la burbuja. (a) ¿Después de cuántas comparaciones estarán ordenados en forma ascendente los diez números más pequeños de la lista? (b) ¿Cuántas comparaciones más se necesitan para terminar la ordenación?

5. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
a) $a_n = 5\, a_{n-1} + 6\, a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
b) $2\, a_{n+2} - 11\, a_{n+1} + 5\, a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = -8$;
c) $3\, a_{n+1} = 2\, a_n + a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 7$, $a_1 = 3$;
d) $a_{n+2} + a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 3$;
e) $a_{n+2} + 4\, a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_0 = a_1 = 1$;
f) $a_n - 6\, a_{n-1} + 9\, a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = 12$;
g) $a_n + 2\, a_{n-1} + 2\, a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

6. Si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} + b\, a_{n+1} + c\, a_n = 0$, donde $n \geq 0$ y b, c son constantes, encuentra a_n.

7. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de estacionar motos y coches en una fila de n espacios si cada moto ocupa un espacio y cada coche ocupa dos. Las motos se consideran idénticas, los coches también y se quiere utilizar todos los espacios.

8. Para $n \geq 0$, sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n. Por ejemplo, $a_3 = 3$, pues (1) 1, 1, 1; (2) 1, 2; (3) 2, 1 suman 3. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para a_n.

9. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de apilar n fichas de póker de color rojo, blanco, verde y azul, de modo que no haya fichas azules consecutivas.

10. Un alfabeto S consta de los cuatro caracteres numéricos 1, 2, 3, 4 y los siete caracteres alfabéticos a, b, c, d, e, f, g. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de palabras de longitud n en S* tales que no aparezcan caracteres alfabéticos consecutivos.

11. Para $n \geq 1$, sea a_n el número de formas de escribir n como una suma ordenada de enteros positivos, de modo que cada sumando sea mayor o igual que 2. Por ejemplo, $a_5 = 3$, puesto que podemos representar 5 como 5, 3 + 2, 2 + 3. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para a_n.

12. Resuelve las relaciones de recurrencia realizando una transformación apropiada:

a) $(a_{n+2})^2 - 5 (a_{n+1})^2 + 4 (a_n)^2 = 0$, con $n \geq 0$ y $a_0 = 4$, $a_1 = 13$.
b) $\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{a_{n-2}} = 0$ con $n \geq 2$ y $a_0 = a_1 = 1$.
c) $n\, a_n + n\, a_{n-1} - a_{n-1} = 2^n$, con $a_0 = 10$.
d) $(a_n)^3 - 2\, a_{n-1} = 0$, con $a_0 = 8$.
e) $a_n = \dfrac{\sqrt{a_{n-1}}}{(a_{n-2})^2}$, con $n \geq 2$, $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

13. Demuestra que dos números de Fibonacci consecutivos son primos relativos.

14. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
a) $a_{n+1} - a_n = 2n + 3$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$;
b) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n$, $n \geq 0$, $a_0 = 3$;
c) $a_{n+1} - 2a_n = 5$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$;
d) $a_n + n\, a_{n-1} = n!$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$;
e) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.

15. El primero de Noviembre se depositaron 1000 € en una cuenta que paga intereses mensualmente a razón de un 6% anual. Al principio de cada mes, se realizará un ingreso por valor de 200 €. Si se continúa realizando esto durante los próximos cuatro años, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta tras esos cuatro años?

16. Resuelve la relación de recurrencia $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n)$, con $n \geq 0$, $a_0 = 1$ y $a_1 = 4$.

17. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia utilizando funciones generatrices:
a) $a_{n+1} - a_n = 3^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$;
b) $a_{n+1} - a_n = n^2$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$;
c) $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$;
d) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$;
e) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
f) Las relaciones que aparezcan en los ejercicios anteriores.

18. Resuelve los siguientes sistemas de relaciones de recurrencia:
a) $a_{n+1} = -2a_n - 4b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$; con $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$.
b) $a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2$, $b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1$; con $n \geq 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$.