MATEMATICA DISCRETA 2. Ejercicios II

1. Determina la función generatriz para el número de formas de distribuir 35 monedas de un euro entre cinco personas, si (a) no hay restricciones; (b) cada persona obtiene al menos un euro; (c) cada persona obtiene al menos dos euros; (d) la persona de mayor edad obtiene al menos 10 euros; y (e) las dos personas más jóvenes deben obtener al menos 10 euros.

2. Calcula la función generatriz para el número de formas de tener n céntimos de euro en (a) monedas de uno y cinco céntimos de euro; (b) monedas de uno, cinco y diez céntimos de euro.

3. Determina la función generatriz para el número de soluciones enteras de las ecuación $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ donde $-3 \le c_1$, $-3 \le c_2$, $-5 \le c_3 \le 5$, $0 \le c_4$.

4. Calcula las funciones generatrices para las siguientes sucesiones. Por ejemplo, en el caso de la sucesión 0, 1, 3, 9, 27, … ; la respuesta es $x/(1 - 3x)$:

a) $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \ldots, \binom{8}{8}$ b) $\binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, 3\binom{8}{3}, \ldots, 8\binom{8}{8}$

c) 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, … d) 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, …

e) 0, 0, 0, 6, – 6, 6, – 6, 6, – 6, … f) 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, …

g) 1, 2, 4, 8, 16, … h) 0, 0, 1, a, a^2, a^3, … con $a \neq 0$

5. En cada uno de los siguientes apartados, $f(x)$ es la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mientras que $g(x)$ es la función generatriz de la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Expresa $g(x)$ en términos de $f(x)$.

a) $b_3 = 3$, $b_n = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$. b) $b_3 = 3$, $b_7 = 7$, $b_n = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3, 7$.

c) $b_1 = 1$, $b_3 = 3$, $b_n = 2a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1, 3$.

d) $b_1 = 1$, $b_3 = 3$, $b_7 = 7$, $b_n = 2a_n + 5$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1, 3, 7$.

6. Calcula el coeficiente de x^{50} en $(x^7 + x^8 + x^9 + \ldots)^6$ y el coeficiente de x^{20} en $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$.

7. Calcula el coeficiente de x^{15} en los siguientes apartados

a) $x^3 (1 - 2x)^{10}$. b) $(x^3 - 5x)/(1 - x)^3$ c) $(1 + x)^4/(1 - x)^4$

8. ¿De cuántas formas se pueden asignar veinticuatro robots idénticos a cuatro líneas de ensamblaje de modo que (a) al menos tres robots se asignen a cada línea? (b) al menos tres, pero no más de nueve se asignen a cada línea?

9. ¿De cuántas formas pueden separarse 3000 sobres idénticos, en paquetes de 25, entre cuatro grupos de estudiantes, de modo que cada grupo tenga al menos 150, pero no más de 1000 sobres?

10. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar canicas de una colección grande de canicas azules, rojas y amarillas (todas del mismo tamaño) si la selección debe incluir un número par de canicas azules?

11. Verifica que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz del número de formas en que se pueden obtener la suma n, $n \in \mathbb{N}$, cuando se lanza un dado un número arbitrario de veces.

12. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar siete números no consecutivos entre el 1 y el 50?

13. Calcula una fórmula para la convolución de cada par de sucesiones:
a) $a_n = 1$, $0 \le n \le 4$, $a_n = 0$, para todo $n \ge 5$; $b_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
b) $a_n = (-1)^n$; $b_n = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
c) $a_n = 1$, $0 \le n \le 3$, $a_n = 0$, para $n \ge 4$; $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_n = 0$, para todo $n \ge 4$.

14. Comprueba que el número de descomposiciones de un entero positivo n en sumandos impares coincide con el número de descomposiciones de n en sumandos distintos.

15. Comprueba que el número de descomposiciones de un entero positivo n tales que ningún sumando es divisible por 4 coincide con el número de descomposiciones de n donde ningún sumando par se repite, aunque los impares pueden repetirse.

16. Calcula la función generatriz del número de descomposiciones de un natural n en sumandos impares donde cada sumando aparece un número impar de veces o no aparece.

17. Encuentra la función generatriz del número de soluciones enteras de
a) $2w + 3x + 5y + 7z = n$, $0 \le w, x, y, z$;
b) $2w + 3x + 5y + 7z = n$, $0 \le w$, $4 \le x, y$, $5 \le z$;
c) $2w + 3x + 5y + 7z = n$, $2 \le w \le 4 \le x \le 7 \le y \le 10 \le z$.

18. Encuentra la función generatriz exponencial de las siguientes sucesiones, siendo a número real:
a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ b) $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ c) $1, -a, a^2, -a^3, a^4, \ldots$
d) $1, a^2, a^4, a^6, \ldots$ e) $a, a^3, a^5, a^7, \ldots$ f) $0, 1, 2(2), 3(2^2), 4(2^3), \ldots$

19. Determina la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices exponenciales:
a) $f(x) = 3e^{3x}$; b) $f(x) = 6e^{5x} - 3e^{2x}$; c) $f(x) = e^x + x^2$;
d) $f(x) = e^{2x} - 3x^3 + 5x^2 + 7x$; e) $f(x) = 1/(1 - x)$; f) $f(x) = 3/(1 - 2x) + e^x$.

20. Encuentra la función generatriz exponencial del número de formas en que se pueden ordenar n letras, $n \ge 0$, seleccionadas de cada una de las siguientes palabras:
a) HAWAII b) MISSISSIPPI c) ISOMORPHISM

21. Para el apartado (b) del ejercicio 20, ¿cuál es la función generatriz exponencial si la disposición debe contener al menos dos letras I?

22. Se genera una sucesión ternaria (0, 1, 2) de 20 dígitos de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que (a) tenga un número par de unos? (b) tenga un número par de unos y un número par de doses? (c) tenga un número impar de ceros? (d) el total de ceros y unos sea impar? (e) el número total de ceros y unos sea par?

23. Comprueba que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = [n(n+1)/2]^2$

24. a) Calcula la función generatriz de la sucesión de productos $0 \times (-1)$, 1×0, 2×1, 3×2, 4×3, …, $i \times (i-1)$, …
b) Utiliza el apartado anterior y halla una fórmula para $\sum_{i=0}^{n} i \times (i-1)$.

25. Calcula la sucesión generada por la función $g(x) = x\, f(x)/(1 - x)$ siendo $f(x)$ la función generatriz de la sucesión $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.