MATEMATICA DISCRETA 2. Ejercicios I

1. Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?

2. Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una sola vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?

3. Sean S y T dos conjuntos finitos con $\#S > k\cdot(\#T)$ y sea f una aplicación se S a T. Demostrar que al menos uno de los subconjunto $f^{-1}(t)$, donde $t \in T$, tiene más de k elementos.

4. El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, pueden presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?
Si tres miembros del consejo son ingenieros en informática ¿cuántas de las anteriores listas tienen:
a) un ingeniero propuesto para la presidencia?
b) exactamente un ingeniero en la lista?
c) al menos un ingeniero en la lista?

5. Un pianista ha ensayado durante 112 horas a lo largo de 12 días (cada día un número entero de horas). Demostrar que hubo un par de días consecutivos en los que ensayó al menos 19 horas.

6. Sea un conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_9\}$ de números naturales diferentes cuya suma es 90. Demostrar que existen en este conjunto cuatro números cuya suma es al menos 40.

7. Se tienen 46 piezas de papel rectangulares. Si *l*, *a* (medidos en centímetros) denotan el largo y el ancho, respectivamente, de cada pieza rectangular, entonces para esta situación tenemos que *l*, *a* son enteros positivos, donde $1 \leq a \leq l \leq 90$. De entre estos 46 rectángulos, demuestra que se pueden seleccionar dos de forma que uno cubra completamente al otro al colocarlo encima.

8. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida.
a) ¿Cuántos números se pueden formar?
b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?

9. Un profesor del Departamento de Computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de FORTRAN y los otros cuatro de PASCAL. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros si:
a) no hay restricciones?
b) los lenguajes se deben alternar?
c) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos?
d) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos y los libros de PASCAL también?

10. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabras POLIINSATURADO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?

11. Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa.
a) ¿Cuántas manos de bridge son posibles?
b) ¿De cuántas formas se le puede dar a una persona 6 picas y 5 corazones?

12. a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?
b) ¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?

13. En una heladería se sirven 7 tipos de helados.
a) ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 12 helados?
b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 12 helados si tiene que haber al menos uno de cada tipo?

14. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si:
a) no hay restricciones?
b) debe contestar las dos primeras preguntas?
c) debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas?

15. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados defectuosos. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo. ¿Cuántas muestras contienen:
a) Tres circuitos defectuosos?
b) Al menos un circuito defectuoso?

16. Si una partida de bridge es una partición ordenada de 52 cartas en cuatro grupos de 13 cartas cada uno. ¿Cuántas partidas distintas de bridge se pueden jugar con una baraja?

17. Una mano de Bridge tiene una distribución $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ con $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$ y $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 13$, si hay n_1 cartas de un palo, n_2 cartas de otros palo, etc. ¿Cuántas manos de bridge hay con una distribución $\{5, 4, 2, 2\}$?

18. ¿De cuántas formas se puede distribuir un conjunto con 2n elementos en n conjuntos de 2 elementos?

19. ¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa y obtener un full (trío más pareja)?; ¿y dobles parejas?

20. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MISSISSIPPI no contienen dos o más letras I consecutivas?

21. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 libros distintos entre cuatro niños de modo que:
a) cada niño reciba tres libros?
b) los dos niños mayores reciban 4 libros y los dos menores dos cada uno?

22. Determínese el coeficiente de x^9y^3 en:
a) $(x + y)^{12}$, b) $(x + 2y)^{12}$, c) $(2x + 3y)^{12}$.

23. Determínese el coeficiente de

a) xyz^2 en $(x + y + z)^4$, b) xyz^2 en $(2x - y - z)^4$, c) xyz^{-2} en $(x - 2y + 3z^{-1})^4$.

24. Determínese la suma de todos los coeficientes de
a) $(x + y)^{10}$, b) $(2s - 3t + 5u + 6v - 11w + 3x + 2y)^{10}$.

25. Dado un número real x y un entero positivo n, muéstrese que

a) $1 = (1 + x)^n - \binom{n}{1} x^1 (1 + x)^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 (1 + x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n$.

b) $1 = (2 + x)^n - \binom{n}{1} (x+1) (2 + x)^{n-1} + \binom{n}{2} (x + 1)^2 (2 + x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} (x + 1)^n$.

26. Determina las formas diferentes en que se pueden elegir 20 monedas de cuatro grandes recipientes que contienen monedas de diferente denominación. Cada recipiente contiene un solo tipo de monedas.

27. ¿De cuántas formas se pueden colocar 24 libros diferentes en cuatro estantes de modo que haya al menos un libro en cada repisa? Para cualquiera de estas disposiciones, considera que en cada repisa los libros deben estar colocados uno junto al otro y el primer libro a la izquierda.

28. ¿De cuántas formas se pueden colocar doce canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si:
a) todas las canicas son negras?
b) cada canica es de distinto color?

29. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la pareja de ecuaciones

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 37; \; x_1 + x_2 + x_3 = 6?$$

¿Cuántas de estas soluciones verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?

30. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos diferentes en orden creciente (como 1347, y 3689) o en orden decreciente (como 6432 y 9531)? ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos en orden no decreciente (como 3467, 2256 y 4777) o no creciente (como 7532, 9966, 5552)?

31. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar nueve bolas de una bolsa que contiene tres bolas rojas, tres verdes, tres azules y tres blancas?

32. ¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueves dígitos) tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?

33. Si se lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cinco tiradas sea 20?

34. ¿De cuántas formas se pueden colocar todas las letras de la palabra INFORMACION de tal manera que ningún par de letras consecutivas aparezcan más de una vez? Queremos contar disposiciones como IINNOOFRMTA y FORTMAIINON pero no INFORRINMOTA (donde “IN” aparece dos veces) o NORTFNOIAMI (donde “NO” aparece dos veces).

35. Determina el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ donde $-5 \le x_i \le 10$ para todo i, $1 \le i \le 4$