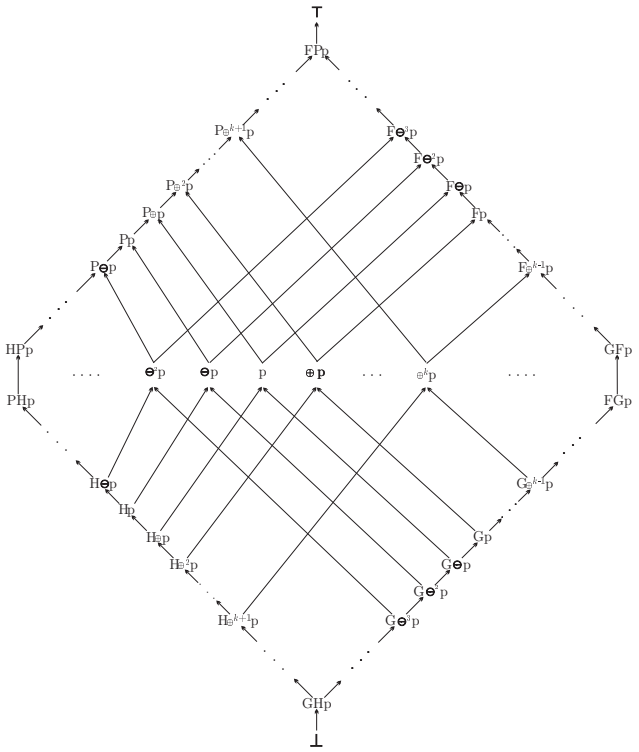


Figura 2: El poset $Lit(p)$ en FNext±

El objetivo principal de nuestro trabajo es obtener y manipular eficientemente los conjuntos de implicados e implicantes unitarios de una fórmula dada. Estos conjuntos, para una *fbf* dada A, son, respectívamente, los siguientes:

$$\mathcal{I}_0(A) = \{\ell \in Lit \mid \models A \to \ell\}$$
$$\mathcal{I}_1(A) = \{\ell \in Lit \mid \models \ell \to A\}$$

Estos conjuntos pueden ser infinitos y, por tanto, dificiles de manejar. Para solventar este problema pretendemos encontrar subconjuntos que los generen. Presentamos, en este trabajo, sólo los resultados que hacen referencia a los conjuntos de implicados, pues los correspondientes a conjuntos de implicantes se obtienen por dualidad. La siguiente definición nos proporciona una primera aproximación.

Definición 3.4 *Dado $\ell \in Lit$, definimos su* calusura superior *e* inferior *respectivamente como*

$$\ell\uparrow = \{\ell' \in Lit \mid \ell \trianglelefteq \ell'\} \quad y \quad \ell\downarrow = \{\ell' \in Lit \mid \ell' \trianglelefteq \ell\}$$

Si $\Gamma \subseteq Lit$ definimos

$$\Gamma\uparrow = \bigcup_{\ell\in\Gamma} \ell\uparrow \quad y \quad \Gamma\downarrow = \bigcup_{\ell\in\Gamma} \ell\downarrow$$

Sin embargo, ésto no es suficiente pues no recoge todas las propiedades de los conjuntos de implicados e implicantes. Por ejemplo,

$$\{\oplus p, G \oplus p\}\uparrow \neq \mathcal{I}_0(\oplus p \wedge G \oplus p)$$

ya que $\oplus p \wedge G \oplus p \equiv Gp$ y $Gp \notin \{\oplus p, G \oplus p\}\uparrow$. Debemos, por tanto, estudiar en qué casos la conjunción de literales es un literal.

Sea $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} \subseteq Lit$ en FNext±, las únicas conjunciones de literales tales que $\bigwedge_{i=1}^n \ell_i \in Lit$ [4] se obtienen aplicando, iterativamente, las siguientes leyes:

1. Si $\ell_1 \in \overline{\ell_2}\downarrow$ entonces $\ell_1 \wedge \ell_2 \equiv \bot$.
2. Si $\ell_1 \trianglelefteq \ell_2$ entonces $\ell_1 \wedge \ell_2 \equiv \ell_1$.
3. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $G \odot^k \ell_p \wedge \odot^k \ell_p \equiv G \odot^{k-1} \ell_p$.
4. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $H \odot^k \ell_p \wedge \odot^k \ell_p \equiv H \odot^{k+1} \ell_p$.
5. Si $k_1 > k_2$ entonces $H \odot^{k_1} \ell_p \wedge G \odot^{k_2} \ell_p \equiv GH\ell_p$.

Por ejemplo, podemos usar las leyes 3 y 5 para obtener:
$G \oplus^5 p \wedge \oplus^5 p \wedge \oplus^4 p \wedge \oplus^3 p \wedge H \oplus^4 p \equiv G \oplus^2 p \wedge H \oplus^4 p \equiv GHp$

4 Conjuntos Cerrados

Los resultados que mostramos en esta sección han sido probados para FNext en [6] y para FNext± en [5].

Definición 4.1 *Decimos que un conjunto no vacío $\Sigma \subseteq Lit$ es* α-cerrado *si contine a todo literal implicado por la conjunción de dos elementos cualesquiera de Σ; es decir, para todo $\ell_1, \ell_2 \in \Sigma$ y $\ell \in Lit$, si $\models (\ell_1 \wedge \ell_2) \to \ell$, entonces $\ell \in \Sigma$.*

Como consecuencia directa de la definición, $\top$ pertenece a todo conjunto α-cerrado. El siguiente teorema caracteriza los conjuntos α-cerrados. [5]

Teorema 4.2 *Sea $\Sigma \subseteq Lit$ un conjunto no vacío, entonces Σ es α-cerrado si y sólo si satisface las dos condiciones siguientes:*

1. $\Sigma\uparrow = \Sigma$ *(es cerrado superiormente)*

[4] Como consecuencia de la definición de *Lit*, $\wedge_{i=1}^n \ell_i \in Lit$ significa que existe $\ell' \in Lit$ tal que $\wedge_{i=1}^n \ell_i \equiv \ell'$.

[5] Usamos los términos α-cerrado en honor a Smullyan.

2. *para todo* $\ell, \ell' \in \Sigma$ *tal que* $\ell \wedge \ell' \in Lit$ *se tiene que* $\ell \wedge \ell' \in \Sigma$.

EJEMPLO 2.- En FNext, el conjunto

$$\begin{aligned}\Sigma = \quad & \{\top, FGp, GFp\} \cup \\ & \cup\{F \oplus^k p \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\oplus^k p, G \oplus^k p \mid k > 0\}\end{aligned}$$

no es α-cerrado porque, aunque es cerrado superiormente, $\oplus p, G \oplus p \in \Sigma$, $\oplus p \wedge G \oplus p \equiv Gp$ y $Gp \notin \Sigma$.

El siguiente objetivo es caracterizar el mínimo conjunto α-cerrado que contiene a uno dado.

Definición 4.3 *Dado* $\Sigma \subseteq Lit$, *definimos la* α*-clausura de* Σ, *denotada por* $\langle\Sigma\rangle^\alpha$, *como sigue:*

$$\langle\Sigma\rangle^\alpha = \bigcup_{\ell_p \in \mathcal{V}^\pm} \left\{ \ell_0 \in Lit \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existe } \Gamma \subseteq \Sigma \text{ finito} \\ \text{tal que } \models \wedge_{\ell\in\Gamma}\ell \rightarrow \ell_0 \end{array} \right\}$$

Como es habitual, la α-clausura de un conjunto es la intersección de todos los conjuntos α-cerrados que lo contienen; y un conjunto $\Sigma \subseteq Lit$ es α-cerrado si y sólo si $\Sigma = \langle\Sigma\rangle^\alpha$.

EJEMPLO 3.- (Véase la figura 3.) En FNext$\pm$, si $\Gamma = \{\ominus p, p, Gp\}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\Gamma\rangle^\alpha = \quad & \{F \odot^k p \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{P \odot^k p \mid k \geq 0\} \cup \\ & \cup\{\odot^k p \mid k \geq -1\} \cup \{G \odot^k p \mid k \geq -2\} \cup \\ & \cup\{\top, FGp, GFp, FPp\}\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.- En FNext$\pm$, si $\Gamma = \{H \oplus^2 p, G \ominus^2 p\}$, entonces $\langle\Gamma\rangle^\alpha = GHp \uparrow = Lit(p) \setminus \{\bot\}$.

4.1 α-bases

Definición 4.4 *Sea* $\Sigma \subseteq Lit$ *un conjunto* α*-cerrado, decimos que* $\Gamma \subseteq \Sigma$ *es* α*-generador de* Σ *si y sólo si* $\langle\Gamma\rangle^\alpha = \Sigma$.

EJEMPLO 5.- $\Gamma_1 = \{H \oplus^2 p, G \ominus^2 p\}$ y $\Gamma_2 = \{GHp\}$ son α-generadores de $\Sigma = Lit(p) \setminus \{\bot\}$. (Véase la figura 4.)

En la siguiente definición, introducimos el concepto de *base* de un conjunto cerrado. La base es el *menor* conjunto generador: veremos que, además de tener menor cardinal, la base tiene otras propiedades que hacen más interesante su manejo.

Definición 4.5 *Sea* $\Sigma \subseteq Lit$ *un conjunto* α*-cerrado. Decimos que* $\Gamma \subseteq Lit$ *es una* α*-base de* Σ *si satisface las dos condiciones siguientes:*

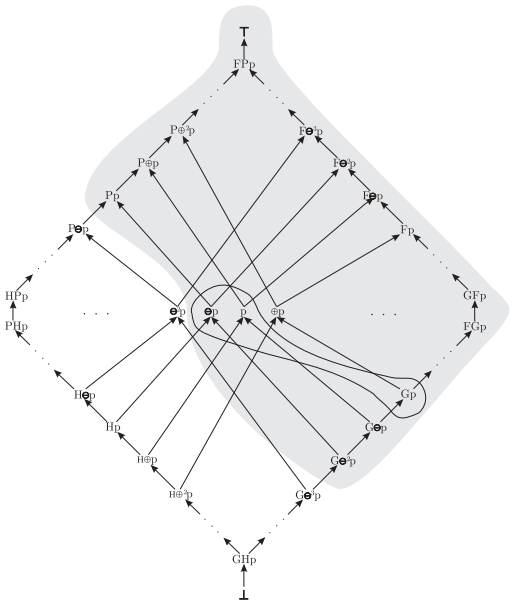


Figura 3: Clausura de Γ

- Γ *es un* α*-generador no vacío de* Σ,
- *todos los elementos de* Γ *son elementos minimales de* Σ *en* $(Lit, \trianglelefteq)$.

EJEMPLO 6.- (Véase la figura 4) $\Gamma_2 = \{GHp\}$ es una α-base de $\Sigma = Lit(p) \setminus \{\bot\}$.

Lema 4.6 *Sea* $\Sigma \subseteq Lit$ *un conjunto* α*-cerrado y* $\emptyset \neq \Gamma \subseteq Lit$. Γ *es una base de* Σ *satisface las dos condiciones siguientes:*

- Γ *es un conjunto generador de* Σ.
- *Para todo* $\ell_p \in \mathcal{V}^\pm$ *y para todo* $\ell, \ell' \in \Gamma \cap Lit(\ell_p)$ $(\ell \neq \ell')$ *tenemos que* $\ell \wedge \ell' \notin Lit(\ell_p)$.

El siguiente lema ilustra la importancia de las bases.

Lema 4.7 *Si* $\Sigma \subseteq Lit$ *es* α*-cerrado y* Γ *es una base de* Σ, *entonces:* $\langle\Gamma\rangle^\alpha = \Gamma\uparrow = \Sigma$

Presentamos a continuación el teorema de unicidad de las bases.

Teorema 4.8 *Sea* Σ *un conjunto* α*-cerrado. Si* Γ *es una base de* Σ, *entonces* Γ *es la* **única** *base de* Σ. *Más aun, si* Γ *es finito, entonces cualquier otro conjunto generador no vacío de* Σ, Γ', *satisface* $|\Gamma| < |\Gamma'|$ [6].

[6] $|\Gamma|$ denota al cardinal de Γ.

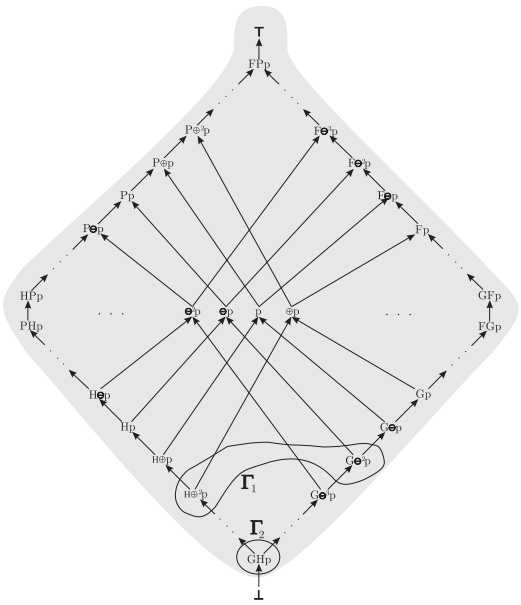


Figura 4: Conjuntos α-generadores de Σ

El lema 4.6 nos lleva a la definición de un operador que transforma cualquier α-generador de un conjunto α-cerrado en su base.

Definición 4.9 *Sea $\Gamma \subseteq Lit$ un conjunto finito, el* 0-normalizador*, denotado por $\mathcal{N}_0$, realiza las siguientes transformaciones:*

- $\mathcal{N}_0(\emptyset) = \{\top\}$
- *Si $\ell, \ell' \in \Gamma$ $(\ell \neq \ell')$ y $\ell \wedge \ell' \equiv \ell'' \in Lit$, entonces substituye ℓ y ℓ' por ℓ''*

Ejemplo 7.- Sea $\Gamma = \{F \oplus^3 p, \oplus p, G \oplus^5 p, \oplus^3 p, H \oplus^2 p\}$. El operador $\mathcal{N}_0$ obtiene la siguiente α-base de $\langle\Gamma\rangle^\alpha$: $\mathcal{N}_0(\Gamma) = \{G \oplus^5 p, \oplus^3 p, H \oplus^2 p\}$

4.2 Unión e Intersección de Conjuntos Cerrados

Como consecuencia directa de la definición de conjunto cerrados, se tiene que:

Lema 4.10 *Si $\Sigma, \Sigma' \subseteq Lit$son conjuntos α-cerrados entonces $\Sigma \cap \Sigma'$ es α-cerrado.*

El siguiente ejemplo muestra que esta propiedad no es cierta para la unión.

Ejemplo 8.- Sean $\Sigma = \oplus p \uparrow$ y $\Sigma' = G \oplus p \uparrow$ Estos conjuntos son α-cerrados, pero $\Sigma \cup \Sigma'$ no es α-cerrado ya que $\oplus p, G \oplus p \in \Sigma \cup \Sigma'$, $\oplus p \wedge G \oplus p \equiv Gp$ y $Gp \notin \Sigma \cup \Sigma'$.

Dados dos conjuntos α-cerrados, Σ y Σ', estamos interesados en los conjuntos $\Sigma \cap \Sigma'$ y $\langle \Sigma \cup \Sigma' \rangle^\alpha$. Más concretamente, deseamos caracterizar las bases de estos dos conjuntos. Con este fin, definimos dos nuevos operadores binarios sobre conjuntos finitos:

Definición 4.11 *Si $\Gamma, \Gamma' \subseteq Lit$ son dos bases de conjuntos α-cerrados, definimos $\Gamma \uplus \Gamma'$ y $\Gamma \owedge \Gamma'$, llamados* 0-unión *y* 0-intersección *de Γ y Γ', como sigue:*

$$\Gamma \uplus \Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_0(\Gamma \cup \Gamma'); \qquad \Gamma \owedge \Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_0\Big(\bigcup_{\substack{\ell \in \Gamma \\ \ell' \in \Gamma'}} S_{up}(\ell, \ell') \Big)$$

donde, si $\ell_1, \ell_2 \in Lit$, $S_{up}(\ell_1, \ell_2)$ denota la α-base de $\ell_1 \uparrow \cap \ell_2 \uparrow$.

En los trabajos publicados demostramos que, gracias a la estructura de las bases, estos operadores tienen coste lineal cuando son aplicados a bases ordenadas. El siguiente lema afirma que satisfacen las condiciones deseadas.

Lema 4.12 *Sean $\Sigma, \Sigma' \subseteq Lit$ conjuntos α-cerrados y Γ,Γ' las bases de Σ y Σ' respectivamente, entonces $\Gamma \uplus \Gamma'$ es la base de $\langle \Sigma \cup \Sigma' \rangle^\alpha$ y $\Gamma \owedge \Gamma'$ es la base de $\Sigma \cap \Sigma'$.*

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del operador $\uplus$:

Ejemplo 9.- Consideramos las bases (ordenadas) $\Gamma = \{H \ominus^3 p, \ominus p, \oplus^4 p, \oplus^5 p, F \oplus^7 p\}$ y $\Gamma' = \{P \ominus^2 p, \ominus p, \oplus^2 p, G \oplus^4 p\}$ respectivamente.

Para obtener $\Gamma \uplus \Gamma'$ con coste lineal, recorremos estas listas como sigue:

- Como $H \ominus^3 p \trianglelefteq P \ominus^2 p$, entonces $P \ominus^2 p$ no pertenece a $\Gamma \uplus \Gamma'$.
- Como $G \oplus^4 p \wedge \oplus^4 p \equiv G \oplus^3 p$, entonces $G \oplus^4 p$ y $\oplus^4 p$ no pertenecen a $\Gamma \uplus \Gamma'$, pero $G \oplus^3 p$ sí.
- Como $G \oplus^4 p \trianglelefteq \oplus^5 p$, entonces $\oplus^5 p$ no pertenece a $\Gamma \uplus \Gamma'$.
- Como $G \oplus^4 p \trianglelefteq F \oplus^7 p$, entonces $F \oplus^7 p$ no es un elemento de $\Gamma \uplus \Gamma'$.
- los demás elementos de Γ y Γ' pertenecen a $\Gamma \uplus \Gamma'$.

El resultado final es: $\Gamma \uplus \Gamma' = \{H \ominus^3 p, \ominus p, \oplus^2 p, G \oplus^3 p\}$.

Los operadores $\uplus$ y $\owedge$ son conmutativos y asociativos (lo que nos permite escribir $\uplus_{i=1}^n \lambda_i$ y $\owedge_{i=1}^n \lambda_i$. Más aun, tenemos que:

$$(i)\ \{\bot\} \uplus \Gamma = \{\bot\} \quad (ii)\ \{\top\} \owedge \Gamma = \{\top\}$$
$$(iii)\ \{\bot\} \owedge \Gamma = \Gamma = \{\top\} \uplus \Gamma$$

Definimos, a continuación, algunos operadores monarios sobre bases que serán utilizados posteriormente.

Definición 4.13 *Para cada conectiva temporal* $\star \in \{\oplus, F, G, \ominus, P, H\}$ *definimos el operador* $\mathtt{Add}^0_\star$ *como sigue:*

$$\mathtt{Add}^0_\star(\lambda) = \mathcal{N}_0(\{\ell \in Lit \mid \ell \equiv \star\ell' \text{ con } \ell' \in \lambda\})$$

Ejemplo 10.- $\Gamma = \{\oplus p, \oplus^3 p, FGp, \oplus^3 q, G \oplus^4 q\}$ es una α-base y se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{Add}^0_F(\Gamma) & = & \mathcal{N}_0(\{F \oplus p, F \oplus^3 p, FGp, F \oplus^3 q, FGq\}) \\ & = & \{FGp, FGq\} \\ \mathtt{Add}^0_H(\Gamma) & = & \mathcal{N}_0(\{H \oplus p, H \oplus^3 p, FGp, H \oplus^3 q, HGq\}) \\ & = & \{H \oplus^3 p, FGp, HGq\} \end{array}$$

5 Implicados unitarios de una fórmula

En esta sección, señalamos algunas propiedades interesantes de los conjuntos de implicados de una fórmula.

Lema 5.1 *Dada una fbf* A*, el conjunto* $\mathcal{I}_0(A)$ *es* α*-cerrado.*

Lema 5.2 *Sean* A *y* B *fbfs .*

1. $\mathcal{I}_0(A) \cap \mathcal{I}_0(B) = \mathcal{I}_0(A \vee B)$
2. $\langle \mathcal{I}_0(A) \cup \mathcal{I}_0(B) \rangle^\alpha \subseteq \mathcal{I}_0(A \wedge B)$

Mostramos en el siguiente ejemplos que este resultado no puede ser mejorado; es decir, existen *fbfs* A y B tales que $\langle \mathcal{I}_0(A) \cup \mathcal{I}_0(B) \rangle^\alpha \subsetneq \mathcal{I}_0(A \wedge B)$:
Ejemplo 11.- Sean $A = p$ y $B = \neg p \vee \oplus p$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{I}_0(A) = \{p, \top\}; \quad \mathcal{I}_0(B) = \{\top\}; \\ \langle \mathcal{I}_0(A) \cup \mathcal{I}_0(B) \rangle^\alpha = \{p, \top\} \\ \mathcal{I}_0(A \wedge B) = \langle \{p, \oplus p\} \rangle^\alpha = \{p, \oplus p, Fp, \top\} \end{array}$$

Teorema 5.3 *Sea* A *una fbf . Si* Γ *es la* α*-base de* $\mathcal{I}_0(A)$*, entonces:*

1. *si* $\star \in \{\oplus, F, \ominus, P\}$ *entonces* $\mathtt{Add}^0_\star(\lambda)$ *es la* α*-base de* $\mathcal{I}_0(\star A)$
2. $\langle \mathtt{Add}^0_G(\lambda) \rangle^\alpha \subseteq \mathcal{I}_0(GA)$ *y* $\langle \mathtt{Add}^0_H(\lambda) \rangle^\alpha \subseteq \mathcal{I}_0(HA)$

Existen *fbfs* en FNext$\pm$ tales que

$$\langle \mathtt{Add}^0_G(\lambda) \rangle^\alpha \subsetneq \mathcal{I}_0(GA)$$

Ejemplo 12.- Sea $A = (p \vee q) \wedge F\neg p$, tenemos que $\mathcal{I}_0(A) = \langle \{F\overline{p}\} \rangle^\alpha = \{F\overline{p}, \top\}$ y $\lambda = F\overline{p}$, pero

$$\begin{array}{l} \langle \mathtt{Add}^0_G(\{F\overline{p}\}) \rangle^\alpha = \quad \{F \oplus^k \overline{p} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{GF\overline{p}, \top\} \\ \mathcal{I}_0(GA) = \langle \{GF\overline{p}, GFq\} \rangle^\alpha \\ \quad = \{F \oplus^k \overline{p}, F \oplus^k q \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{GF\overline{p}, GFq, \top\} \end{array}$$

6 Forma Normal Negativa Temporal

En esta sección definimos una forma normal negativa temporal (*fnn*$_t$)equivalente a una fórmula dada A en FNext$\pm$. Primero motivamos dicha definición:

El teorema 5.3 asegura que si A es una *fbf* y Γ es la base de $\mathcal{I}_0(A)$, entonbces:

$$\mathcal{I}_0(GA) \supseteq \langle \mathrm{Add}^0_G(\lambda) \rangle^\alpha \qquad \mathcal{I}_0(HA) \supseteq \langle \mathrm{Add}^0_H(\lambda) \rangle^\alpha$$

Sin embargo, estas inclusiones se convierten en igualdad cuando A es un literal. Por tanto, estamos interesados en expresar A con el menor número posible de ocurrencias de G y H y con el menor rango de éstas. Por otro lado, el lema 5.2 asegura que si A y B son *fbfs* , entonces:

$$\mathcal{I}_0(A) \cup \mathcal{I}_0(B) \subseteq \mathcal{I}_0(A \wedge B)$$

Para reducir esta perdida de información, debemos aumentar el rango de las conjunciones. Estos objetivos guian la siguiente definición:

Definición 6.1 *La noción de forma normal negativa temporal, denotado por* *fnn*$_t$ *, se define recursivamente del siguiente modo:*

1. *Cualquier literal es una* *fnn*$_t$
2. *Si* $A_1, \ldots, A_n$ *son* *fnn*$_t$*s , entonces* $\vee_{i=1}^{i=n} A_i$ *y* $\wedge_{i=1}^{i=n} A_i$ *son* *fnn*$_t$*s*
3. $F(\wedge_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $GF(\wedge_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $P(\wedge_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $FP(\wedge_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $HP(\wedge_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $G(\vee_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $FG(\vee_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $H(\vee_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$, $GH(\vee_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$ *y* $PH(\vee_{i\in\{1,\cdots n\}} A_i)$ *son* *fnn*$_t$ *si se satisfacen las tres condiciones siguientes:*
   (a) $A_1, \ldots, A_n$ *son* *fnn*$_t$*s*
   (b) *No existe un* A_i *de la forma* γB *con*

$$\gamma \in \{FP, GH, FG, GF, PH, HP\}$$

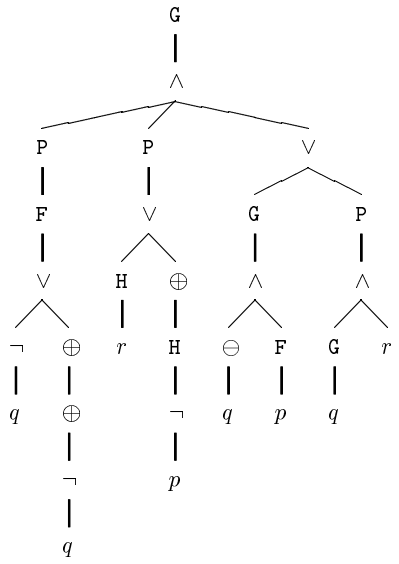
(c) *Si para todo* $i \in \{1, \cdots n\}$, *se tiene que* $A_i = \gamma_i B_i$ *donde* $\gamma_i \in \{F, G, P, H\}$ *entonces, existen* $i_1, i_2 \in \{1, \cdots n\}$ *tales que* $\gamma_{i_1} \in \{F, H\}$ *y* $\gamma_{i_2} \in \{G, P\}$

A partir de ahora, usaremos la fórmula o su árbol sintáctico sin distinción, para referirnos a una *fnn*$_t$.

Ejemplo 13.-

$$G\Big(PF\big(\neg q \vee \oplus \oplus \neg q\big) \wedge P\big(Hr \vee \oplus H \neg q\big) \wedge \big(G(\ominus q \wedge Fp) \vee P(Gq \wedge r)\big)\Big)$$

es una *fbf* en FNext±. Su árbol sintáctico es el siguiente:



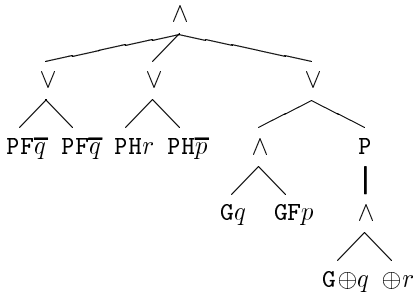
Esta fórmula no es una *fnn*$_t$ porque, por ejemplo, tiene una ocurrencia de $\wedge$ cuyo padre es G (la raiz).

Teorema 6.2 *Sea* A *una fbf . Es posible obtener una* *fnn*$_t$ *equivalente a* A *con coste lineal.*

Aplicamos iterativamente las transformaciones dadas por la doble negación, las leyes de morgan, las leyes dadas en la sección 3 y las siguientes equivalencias:

1. $\oplus(A \star B) \equiv \oplus A \star \oplus B$ y $\ominus(A \star B) \equiv \ominus A \star \ominus B$ si $\star \in \{\wedge, \vee\}$
2. $F(\bigvee_{i\in I} A_i) \equiv \bigvee_{i\in I} FA_i$; $G(\bigwedge_{i\in I} A_i) \equiv \bigwedge_{i\in I} GA_i$
   $P(\bigvee_{i\in I} A_i) \equiv \bigvee_{i\in I} PA_i$ y $H(\bigwedge_{i\in I} A_i) \equiv \bigwedge_{i\in I} HA_i$
3. Si $J = \{i \in I \mid A_i = \gamma_i B_i \text{ y } \gamma_i \in \{GH, FP, FG, GF, HP, PH\}\}$, entonces
   3.1 $F(\bigwedge_{i\in I} A_i) \equiv (\bigwedge_{i\in J} A_i) \wedge F(\bigwedge_{i\in I\setminus J} A_i)$.
   3.2 $G(\bigvee_{i\in I} A_i) \equiv (\bigvee_{i\in J} A_i) \vee G(\bigvee_{i\in I\setminus J} A_i)$.
   3.3 $P(\bigwedge_{i\in I} A_i) \equiv (\bigwedge_{i\in J} A_i) \wedge P(\bigwedge_{i\in I\setminus J} A_i)$.
   3.4 $H(\bigvee_{i\in I} A_i) \equiv (\bigvee_{i\in J} A_i) \vee H(\bigvee_{i\in I\setminus J} A_i)$.
4. $F(\bigwedge_{i\in I} A_i) \equiv \bigwedge_{i\in I} FA_i$, $G(\bigvee_{i\in I} A_i) \equiv \bigvee_{i\in I} GA_i$, $P(\bigwedge_{i\in I} A_i) \equiv \bigwedge_{i\in I} PA_i$ y $H(\bigvee_{i\in I} A_i) \equiv \bigvee_{i\in I} HA_i$ si se satisface una de las condiciones siguientes:
   - $\forall i \in I$, $A_i = \gamma_i B_i$ con $\gamma_i \in \{F, H\}$
   - $\forall i \in I$, $A_i = \gamma_i B_i$ con $\gamma_i \in \{G, P\}$

Ejemplo 14.- En el apéndice A, mostramos paso a paso la transformación de la fórmula del ejemplo 13 a la siguiente *fnn*$_t$.



7 Conclusiones

En este trabajo presentamos una teoría formal que nos permite estructurar y manejar, de modo eficiente, la información de los conjuntos de literales implicados e implicantes de una fórmula. Definimos una *forma normal negativa temporal* adecuada para la deducción automática y un algoritmo que, con coste lineal, nos permite transformar cualquer fórmula en una *fnn*$_t$ equivalente a ella. Al mismo tiempo que obtiene esta forma normal, este algoritmo puede incorporar información sobre los implicados e implicantes de cada subfórmula de la fórmula dada. Esta información asociada a la forma normal es una herramienta básica para la metodología de demostración TAS introducida por nuestro grupo ([8],[9],[10],[11]).

Como ejemplo de las ventajas de esta técnica, mostramos el proceso de reducción *simplifica* que detecta si una *fnn*$_t$ es insatisfacible, válida o equivalente a un literal con su consecuente proceso de deducción.

Sea A una *fnn*$_t$,

1. Si $\ell \in \mathcal{I}_0(A)$ y $\ell \in \mathcal{I}_1(A)$, entonces $A \equiv \ell$.
2. Si $\bot \in \mathcal{I}_0(A)$, entonces A es insatisfacible.
3. Si $\top \in \mathcal{I}_1(A)$, entonces A es válida.
4. Si $\mathcal{I}_1(A) \neq \{\bot\}$ entonces A es satisfacible.

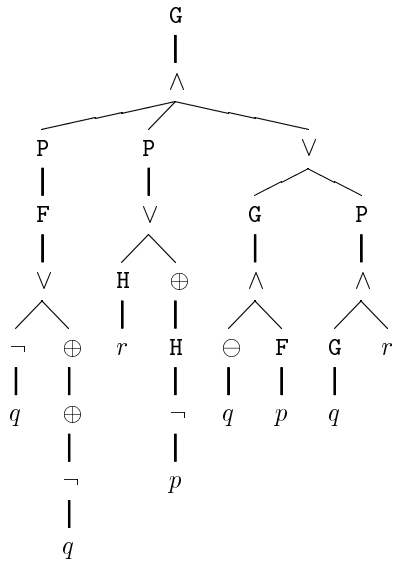
Asímismo, es posible definir otras estrategias de reducción que, a partir de los conjuntos de implicados e implicantes y con coste lineal, disminuyen el tamaño de la fórmula eliminando información supérflua. Nuestro trabajo futuro se centra en el desarrollo de un demostrador automático para lógica temporal mejorando los propuestos en [10], [11] y en la extensión de estos resultados a una lógica temporal totalmente expresiva, concretamente a la lógica LN presentada en [1].

A Ejemplo

En este ejemplo mostramos, paso a paso, la transformación de la *fbf* del ejemplo 13 en su correspondiente fnn_t. La fórmula es

$$G\Big(PF\big(\neg q \vee \oplus \oplus \neg q\big) \wedge P\big(Hr \vee \oplus H\neg q\big) \wedge \big(G(\ominus q \wedge Fp) \vee P(Gq \wedge r)\big)\Big)$$

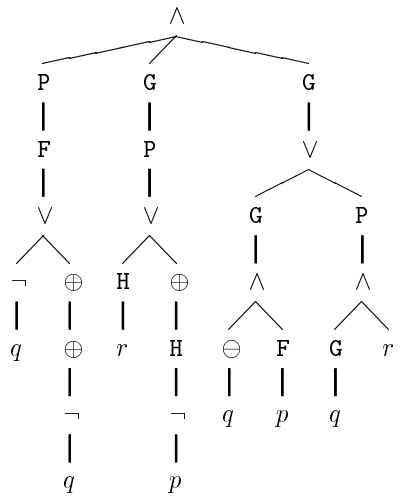
Su árbol sintáctico es el siguiente:



Aplicamos las siguientes transformaciones

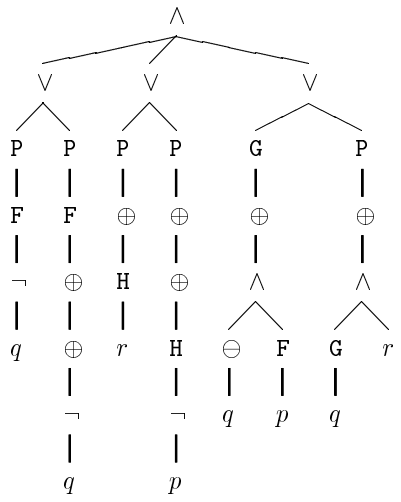
$$G(PFA \wedge B \wedge C) \equiv PFA \wedge GB \wedge GC$$

y el resultado es el siguiente árbol:



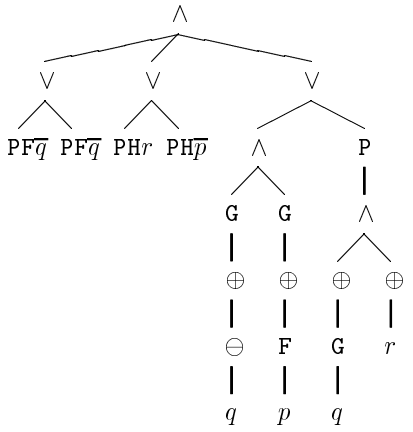
Ahora, realizamos las siguinetes transformaciones:

- $PF(A \vee B) \equiv P(FA \vee FB) \equiv PFA \vee PFB$
- $GP(A \vee B) \equiv P \oplus (A \vee B) \equiv P \oplus A \vee P \oplus B$
- $G(GA \vee PB) \equiv GGA \vee GPB \equiv G \oplus A \vee P \oplus B$



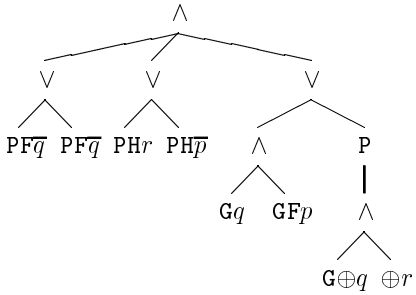
Tenemos un nuevo árbol con las siguientes transformaciones:

- $PF \oplus \oplus \neg q \equiv PF\overline{q}$
- $P \oplus Hr \equiv PH \oplus r \equiv PHr$
- $P \oplus \oplus H\neg p \equiv PH \oplus \oplus \neg p \equiv PH\overline{p}$
- $G \oplus (A \wedge B) \equiv G \oplus A \wedge G \oplus B$
- $P \oplus (A \wedge B) \equiv P(\oplus A \wedge \oplus B)$



Por último, concluimos el proceso con las transformaciones:

- $G \oplus \ominus q \equiv Gq$
- $G \oplus Fp \equiv GF \oplus p \equiv GFp$
- $\oplus Gq \equiv G \oplus q$



Este árbol se corresponde con una fnn_t .

Referencias

[1] A. Burrieza and I. P. de Guzmán. A new algebraic semantic approach and some adequate connectives for computation with temporal logic over discrete time. *Journal of Applied non Classical Logic*, 2, 1992.

[2] M. Fisher. A resolution method for temporal logic. In *12^{th} International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, 1991.

[3] Dixon, C., Fisher, M. y Wooldridge, M. Resolution for Temporal Logics of Knowledge. Journal of Logic and Computation. To Appear.

[4] Wooldridge, M., Dixon, C. y Fisher, M. A Tableau-Based Proof Method for Temporal Logics of Knowledge and Belief. Journal of Applied Non-Classical Logics. To appear.

[5] I. P. de Guzmán, P. Cordero, and M. Enciso. Structure theorems for closed sets of implicates/implicants in temporal logic. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 1695:193–207, 1999.

[6] I. P. de Guzmán, P. Cordero, and M. Enciso. A temporal negative normal form which preserves implicants and implicates. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, To appear.

[7] I. P. de Guzmán, G. Aguilera and M. Ojeda. Increasing the efficiency of automated theorem proving. *Journal of Applied non Classical logics*, 5(1): 9–29, 1995.

[8] I. P. de Guzmán, G. Aguilera and M. Ojeda. Automated model building via syntactic trees transformations. In *In* Proceedings of the CADE-12 Workshop on Automated Model Building, *pages 4–10, Nancy (France), June*, Sept. 1994.

[9] I. P. de Guzmán, G. Aguilera, M. Ojeda and A. Valverde. Reducing signed propositional formulas. *Soft Computing*, 2(4), 1999.

[10] I. P. de Guzmán and M. Enciso. A new and complete automated theorem prover for temporal logic. *IJCAI-Workshop on Executable Temporal Logics*, 1995.

[11] I. P. de Guzmán, M. Enciso and Carlos Rossi. Temporal reasoning over linear discrete time. *Lect. Notes in Artif. Intelligence no. 838*, pages 198–216, 1996.

[12] Z. Manna and A. Pnueli. *Temporal verification of reactive systems: Safety.* Springer-Verlag, 1995.

[13] R. Hahnler y Gonzalo Escalada. Deduction in many valued logics: a survey. Mathware and Soft Computing. Vol IV, 2. 1997

[14] R. Hahnler. *Advances in Many-Valued Logics.* Handbook of Philosophical Logic. 2a Edición. Kluwer. To appear.

[15] Francisco Sanz. *Hacia una alternativa a la resolución.* PhD thesis, Universidad de Málaga, España, 1992.

[16] D. E. Smith y D. S. Wald. *Temporal Planning with Mutual Exclusion Reasoning.* IJCAI'99. Swedeen. Morgan-Kauffman.

[17] A.K. Pujarl y A. Sattar *A Nwe Framework for Reasoning About Points, Intervals and Durations.* IJCAI'99. Swedeen. Morgan-Kauffman.

[18] S. Staab y U. Hahn. *Scalable Temporal Rasoning.* IJCAI'99. Swedeen. Morgan-Kauffman.

[19] P. Wolper. The tableaux method for temporal logic: an overview. *Logique et Analyse*, 28 année, 110-111:119–136, 1985.