Cálculo de Secuentes (primer órden)

Pedro Cabalar

Dept. Computer Science
University of Corunna, SPAIN

March 30, 2023

1 Sustitución

Variables libres/ligadas

- Las variables ligadas forman parte de los cuantificadores: tanto $\forall x$ como $\exists y$ son operadores

Variables libres/ligadas

- Las variables ligadas forman parte de los cuantificadores: tanto $\forall x$ como $\exists y$ son operadores
- Recordatorio: definición de variable libre en una fórmula
  - x está libre en cualquier fórmula atómica
  - x está libre en $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\neg\alpha$
    sii lo está al menos en α o en β
  - x está libre en $\exists y\alpha$, $\forall y\alpha$ (con x diferente de y) si lo está en α

Variables libres/ligadas

- Las variables ligadas forman parte de los cuantificadores: tanto $\forall x$ como $\exists y$ son operadores
- Recordatorio: definición de variable libre en una fórmula
  - x está libre en cualquier fórmula atómica
  - x está libre en $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\neg\alpha$ sii lo está al menos en α o en β
  - x está libre en $\exists y \alpha$, $\forall y \alpha$ (con x diferente de y) si lo está en α
- Recordatorio: definición de variable ligada en una fórmula
  - x nunca está ligada en una fórmula atómica
  - x está ligada en $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\neg\alpha$ sii lo está al menos en α o en β
  - x está ligada en $\exists x \alpha$, $\forall x \alpha$
  - y está ligada en $\exists x \alpha$, $\forall x \alpha$ si y está ligada en α

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x, y)$	

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x, y)$	x ligada, y libre

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x \; P(x,y)$	x ligada, y libre
$\exists y \; \forall x \; (P(x,y) \rightarrow \exists y \; Q(y,x))$	

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x,y)$	x ligada, y libre
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x))$	x, y ligadas

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x,y)$	x ligada, y libre
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x))$	x, y ligadas
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$	

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x, y)$	x ligada, y libre
$\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \to \exists y\ Q(y, x))$	x, y ligadas
$\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \to \exists y\ Q(y, z))$	x, y ligadas, z libre

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x,y)$	x ligada, y libre
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \to \exists y\ Q(y,x))$	x, y ligadas
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \to \exists y\ Q(y,z))$	x, y ligadas, z libre
$\forall x\ (P(x,y) \to \exists y\ Q(y,z))$	

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x,y)$	x ligada, y libre
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x))$	x, y ligadas
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$	x, y ligadas, z libre
$\forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$	y libre (la primera), x, y ligadas

Variables ligadas

Ejemplos

Fórmula	variables
$\forall x\ P(x,y)$	x ligada, y libre
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,x))$	x, y ligadas
$\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$	x, y ligadas, z libre
$\forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$	y libre (la primera), x, y ligadas

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ Q(y, z))$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ Q(y, z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow Q(x, z))\ )$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x,y) \wedge P(y,x)) \rightarrow Q(x,z))\ )$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x,y) \wedge P(y,x)) \rightarrow Q(x,z))\ )$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x,y) \rightarrow \exists y\ Q(y,z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x,y) \wedge P(y,x)) \rightarrow Q(x,z))\ )$
- Renombrado: siempre podemos cambiar el nombre de una variable ligada por otro nuevo

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \to \exists y\ Q(y, z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \to Q(x, z))\ )$
- Renombrado: siempre podemos cambiar el nombre de una variable ligada por otro nuevo

$$\exists x\ (\ \forall x\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \to Q(x, z))\ )$$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ Q(y, z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow Q(x, z))\ )$
- Renombrado: siempre podemos cambiar el nombre de una variable ligada por otro nuevo

  $\exists w\ (\ \forall x\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow Q(w, z))\ )$

Variables ligadas

- Cuando x está ligada, siempre podemos señalar su cuantificador asociado: es el más cercano desde la izquierda que le afecta
- Ejemplo: $\exists y\ \forall x\ (P(x, y) \rightarrow \exists y\ Q(y, z))$
- Ejemplo: $\exists x\ (\ \forall x\ (P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow Q(x, z))\ )$
- Renombrado: siempre podemos cambiar el nombre de una variable ligada por otro nuevo

  $\exists w\ (\ \forall v\ (P(v, y) \wedge P(y, v)) \rightarrow Q(w, z))\ )$

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $\big(\,\forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\,\big)[y/f(w)]$

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $\big(\,\forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\,\big)[y/f(w)]$
  $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $\big(\, \forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x)) \,\big)[y/f(w)]$
  $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$
- En general, α y $\alpha[x/t]$ no son equivalentes

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $\big(\, \forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x)) \,\big)[y/f(w)]$
  $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$
- En general, α y $\alpha[x/t]$ no son equivalentes
- Precaución: si t contiene variables libres, no pueden quedar ligadas por accidente en α.

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $(\,\forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\,)[y/f(w)]$ $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$
- En general, α y $\alpha[x/t]$ no son equivalentes
- Precaución: si t contiene variables libres, no pueden quedar ligadas por accidente en α. Si es así, hay qe renombrar la variable ligada original

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $(\ \forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\ )[y/f(w)]$ $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$
- En general, α y $\alpha[x/t]$ no son equivalentes
- Precaución: si t contiene variables libres, no pueden quedar ligadas por accidente en α. Si es así, hay qe renombrar la variable ligada original
- Ejemplo: $(\ \forall x\ (P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\ )[y/f(x)]$

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $(\ \forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\ )[y/f(w)]$
  $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$
- En general, α y $\alpha[x/t]$ no son equivalentes
- Precaución: si t contiene variables libres, no pueden quedar ligadas por accidente en α. Si es así, hay qe renombrar la variable ligada original
- Ejemplo: $(\ \forall x\ (P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\ )[y/f(x)]$

  $= (\ \forall w(P(w,y) \wedge \exists y Q(y,w))\ )[y/f(x)]$

Sustitución

- $\alpha[x/t]$ denota la fórmula resultante de reemplazar toda aparición libre de x en α por el término t
- Ejemplo: $(\ \forall x(P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\ )[y/f(w)]$
  $= \forall x(P(x,f(w)) \wedge \exists y Q(y,x))$
- En general, α y $\alpha[x/t]$ no son equivalentes
- Precaución: si t contiene variables libres, no pueden quedar ligadas por accidente en α. Si es así, hay qe renombrar la variable ligada original
- Ejemplo: $(\ \forall x\ (P(x,y) \wedge \exists y Q(y,x))\ )[y/f(x)]$

  $= (\ \forall w(P(w,y) \wedge \exists y Q(y,w))\ )[y/f(x)]$
  $= \forall z(P(z,f(x)) \wedge \exists y Q(y,z))$

Cálculo de Secuentes en primer orden

- Añadimos al cálculo de secuentes proposicional las siguientes cuatro reglas:

$$\frac{\Gamma, \alpha[x/a] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \alpha \ \vdash \ \Delta} \ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha[x/t], \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \exists x \alpha, \Delta} \ (\exists R)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha[x/t] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \alpha \ \vdash \ \Delta} \ (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha[x/a], \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \forall x \alpha, \Delta} \ (\forall R)$$

Cálculo de Secuentes en primer orden

- Añadimos al cálculo de secuentes proposicional las siguientes cuatro reglas:

$$\frac{\Gamma, \alpha[x/a] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \alpha \ \vdash \ \Delta} \ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha[x/t], \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \exists x \alpha, \Delta} \ (\exists R)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha[x/t] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \alpha \ \vdash \ \Delta} \ (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha[x/a], \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \forall x \alpha, \Delta} \ (\forall R)$$

- t puede ser cualquier término sin variables de nuestra elección. El que más nos convenga

Cálculo de Secuentes en primer orden

- Añadimos al cálculo de secuentes proposicional las siguientes cuatro reglas:

$$\frac{\Gamma, \alpha[x/a] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \alpha \ \vdash \ \Delta} \ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha[x/t], \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \exists x \alpha, \Delta} \ (\exists R)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha[x/t] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \alpha \ \vdash \ \Delta} \ (\forall L) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \alpha[x/a], \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \forall x \alpha, \Delta} \ (\forall R)$$

- t puede ser cualquier término sin variables de nuestra elección. El que más nos convenga
- a es una constante nueva que no aparezca en el consecuente (eigenvariable).

Secuentes: ejemplo 1

$$\frac{}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}$$

Secuentes: ejemplo 1

$$\dfrac{\overline{\neg\alpha(a) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 1

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\forall x\ \alpha(x), \neg\alpha(a) \vdash}}{\neg\alpha(a) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\neg R)}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg\alpha(a), \forall x\ \alpha(x) \vdash}}{\forall x\ \alpha(x), \neg\alpha(a) \vdash}\ (CL)}{\neg\alpha(a) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\neg R)}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\forall x\ \alpha(x) \vdash \alpha(a)}}{\neg\alpha(a), \forall x\ \alpha(x) \vdash}\,(\neg L)}{\forall x\ \alpha(x), \neg\alpha(a) \vdash}\,(CL)}{\neg\alpha(a) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\,(\neg R)}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\,(\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 1

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha(a) \vdash \alpha(a)}}{\forall x\ \alpha(x) \vdash \alpha(a)}\ (\forall L)}{\neg\alpha(a), \forall x\ \alpha(x) \vdash}\ (\neg L)}{\forall x\ \alpha(x), \neg\alpha(a) \vdash}\ (CL)}{\neg\alpha(a) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\neg R)}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}\ (\exists L)
$$

Secuentes: ejemplo 1

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha(a) \vdash \alpha(a)}\text{(Ax)}}{\forall x\ \alpha(x) \vdash \alpha(a)}(\forall L)}{\neg\alpha(a), \forall x\ \alpha(x) \vdash}(\neg L)}{\forall x\ \alpha(x), \neg\alpha(a) \vdash}(CL)}{\neg\alpha(a) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}(\neg R)}{\exists x\ \neg\alpha(x) \vdash \neg\forall x\ \alpha(x)}(\exists L)
$$

Secuentes: ejemplo 2

$$\frac{}{\exists x\, \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\, \exists x\ P(x,y)}$$

Secuentes: ejemplo 2

$$\dfrac{\overline{\forall y\ P(a,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}}{\exists x\ \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 2

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\forall y\ P(a,y) \vdash \exists x\ P(x,b)}}{\forall y\ P(a,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\forall R)}{\exists x\ \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P(a,b) \vdash \exists x\ P(x,b)}}{\forall y\ P(a,y) \vdash \exists x\ P(x,b)}\ (\forall L)}{\forall y\ P(a,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\forall R)}{\exists x\ \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\exists L)$$

Secuentes: ejemplo 2

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(a,b) \vdash P(a,b)}}{P(a,b) \vdash \exists x\ P(x,b)}\ (\exists R)}{\forall y\ P(a,y) \vdash \exists x\ P(x,b)}\ (\forall L)}{\forall y\ P(a,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\forall R)}{\exists x\ \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\exists L)
$$

Secuentes: ejemplo 2

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(a,b) \vdash P(a,b)}\ (\text{Ax})}{P(a,b) \vdash \exists x\ P(x,b)}\ (\exists R)}{\forall y\ P(a,y) \vdash \exists x\ P(x,b)}\ (\forall L)}{\forall y\ P(a,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\forall R)}{\exists x\ \forall y\ P(x,y) \vdash \forall y\ \exists x\ P(x,y)}\ (\exists L)
$$

Secuentes: ejemplos

Intenta los siguientes

- $\forall x \exists y\ P(x, y) \vdash \exists y\ \forall x\ P(x, y)$
- $\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$
- $\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x) \vdash \forall x\ (P(x) \land Q(x))$
- $\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x) \vdash \forall x\ (P(x) \lor Q(x))$