Tema 2: Lógica de Predicados

Lógica-GIA

Curso 2022–2023

Cálculo de predicados

- El Cálculo de Predicados, o Lógica de Primer Orden, permite hablar de individuos y sus relaciones.
- El término "Primer Orden" significa que podemos cuantificar sobre individuos utilizando $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe). Por ejemplo, $\forall x \left(\mathit{Hombre}(x) \to \mathit{Mortal}(x) \right)$.
- La Lógica de Segundo Orden permite cuantificar sobre relaciones.
- Hay lógicas de orden superior...

Sintaxis: Signatura

Signatura en Lógica de Primer Orden: $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$ donde

- $\mathcal{C}$, conjunto de constantes,
- $\mathcal{F}$, conjunto de funciones,
- $\mathcal{R}$, conjunto de relaciones o predicados,
- $\delta\colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{Z}^+$, indica el grado o aridad de cada función o predicado.

Ejemplo:

- $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$
- $\mathcal{F} = \{sig, min\}$
- $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$
- $\delta(sig) = 1,\ \delta(min) = 2,$
  $\delta(lab) = 1, \delta(anterior) = 2.$

Sintaxis: Signatura

Signatura en Lógica de Primer Orden: $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$ donde

- $\mathcal{C}$, conjunto de constantes,
- $\mathcal{F}$, conjunto de funciones,
- $\mathcal{R}$, conjunto de relaciones o predicados,
- $\delta \colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{Z}^+$, indica el grado o aridad de cada función o predicado.

Ejemplo:

- $\mathcal{C} = \{0, 1\}$
- $\mathcal{F} = \{\mathit{siguiente}, \mathit{suma}, \mathit{producto}\}$
- $\mathcal{R} = \{\mathit{menor}, \mathit{par}\}$
- $\delta(\mathit{siguiente}) = 1,\ \delta(\mathit{suma}) = 2,\ \delta(\mathit{producto}) = 2,$
  $\delta(\mathit{menor}) = 2,\ \delta(\mathit{par}) = 1.$

Sintaxis: Términos

Los términos son las expresiones del lenguaje que se identifican con posibles objetos del mundo.

- Se define un término como:
  - una constante c,
  - una variable x,
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = n$, y donde cada t_i es, a su vez, un término.

▷ Si $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$, $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$

- son términos:
  - ℓ
  - $sig(x)$
  - $min(sig(x), v)$
  - $sig(min(m, d))$
- no son términos:
  - $lab(x)$ $(lab \notin \mathcal{F})$
  - $sig(m, v)$ $(\delta(sig) \neq 2)$

Sintaxis: Términos

Los términos son las expresiones del lenguaje que se identifican con posibles objetos del mundo.

- Se define un término como:
  - una constante c,
  - una variable x,
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = n$, y donde cada t_i es, a su vez, un término.

▷ Si $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{siguiente, suma, producto\}$, $\mathcal{R} = \{menor, par\}$

- son términos:
  - 1, x
  - $suma(x, 1)$
  - $siguiente(suma(x, 1))$
  - $suma(producto(x, 0), siguiente(z))$
- no son términos:
  - $menor(0, 1)$ $(menor \notin \mathcal{F})$
  - $suma(menor(0, 1), 1)$ ($menor(0, 1)$ no es un término)

Sintaxis: fórmulas

Las fórmulas son las expresiones que se identifican con afirmaciones sobre los objetos del mundo, y tendrán la posibilidad de ser evaluadas como verdaderas o falsas.

- Las fórmulas se construyen combinando la signatura con
  - los operadores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - los cuantificadores $\forall$, $\exists$
  - variables: x, y, $z, \ldots$
  - símbolos auxiliares: (y)

▷ En un LPO no puede haber símbolos comunes entre los conjuntos de variables y constantes, ni entre los símbolos de función y de predicado.

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

▷ Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, anterior\}$

- son fórmulas:
  - $lab(x)$
  - $anterior(x, \ell)$
  - $lab(x) \rightarrow anterior(x, \ell)$
  - $\forall x\, [\, lab(x) \rightarrow anterior(x, \ell)\,]$
- no son fórmulas:
  - $min(\ell, y)$ $(min \notin \mathcal{R})$
  - $anterior(\ell, lab(s))$ $(lab(s)$ no es un término$)$

Sintaxis: fórmulas

Una fórmula bien formada (fbf) se define como:

- cualquier átomo o fórmula atómica
  $P(t_1, \ldots, t_n)$, con $P \in \mathcal{R}$, $\delta(P) = n$ y cada t_i un término.
- si α, β son fbf, entonces $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son fbf
- si α es una fbf, entonces $\forall x\, \alpha$ y $\exists x\, \alpha$ son fbf

▷ Para $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{siguiente, suma, producto\}$, $\mathcal{R} = \{menor, par\}$

- son fórmulas:
  - $par(1)$,
  - $menor(x, 1)$
  - $par(x) \rightarrow menor(x, 1)$
  - $\forall x\, [\, par(x) \rightarrow menor(x, 1)\,]$
- no son fórmulas:
  - $suma(1, y)$ $\quad$ ($suma \notin \mathcal{R}$)
  - $menor(0, par(x))$ $\quad$ ($par(x)$ no es un término)

Sintaxis: Variables libres y variables ligadas

- Una variable x es libre (resp. ligada) en una fórmula cuando:
  - en un átomo:
    toda variable es libre
  - en $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$:
    x es libre (resp. ligada) si, y sólo si, lo es en α o en β.
  - en $\exists x\alpha$, $\forall x\alpha$:
    x ligada; y libre (resp. ligada) si, y sólo si, lo es en α.

- Las fórmulas sin variables libres se llaman fórmulas cerradas o sentencias

▷ Una variable puede ser libre y ligada a la vez en la misma fórmula

$$[\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x,y))] \rightarrow [\exists y\,(P(y) \rightarrow Q(z,x))]$$

libres: x, y, z;   ligadas: x, y

Semántica: Interpretación

Una interpretación I (para la signatura $\Sigma = \{\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \delta\}$) es un par (D, I) donde:

- D es un conjunto no vacío, denominado dominio o universo,
- I es una función definida sobre los símbolos propios del lenguaje:
  - para cada constante $c \in \mathcal{C}$,
    c_I es un elemento de D,
  - para cada $f \in \mathcal{F}$ con $\delta(f) = n$,
    $f_I : D^n \to D$ es una función $n - aria$ en D,
  - para cada $P \in \mathcal{R}$ con $\delta(P) = n$,
    $P_I : D^n \to \{F, T\}$ es una aplicación
    (identificamos $P_I = \{(d_1, \cdots, d_n) \in D^n \mid P_I(d_1, \cdots, d_n) = T\} \subseteq D^n$)

Una asignación σ (para una interpretación I) es una aplicación que asigna, a cada variable x, un elemento $\sigma(x)$ del dominio D.

Semántica: Ejemplos de interpretaciones

Para $\mathcal{C} = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{sig, suma\}$, $\mathcal{R} = \{menor\}$,
$\delta(sig) = 1$, $\delta(suma) = 2$, $\delta(nenor) = 2$.

▷ Una posible interpretación está dada por:

- $D = \mathbb{N}$
- $0_I = 0$
- $sig_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \rightsquigarrow n + 1$
  $suma_I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \rightsquigarrow n + m$
- $menor_I = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n < m\}$

▷ Otra interpretación para la misma signatura:

- $D = \{0, 1\}^*$, conjunto de las cadenas binarias
- $0_I = \lambda$, cadena vacía
- $sig_I : D \to D, \quad \omega \rightsquigarrow \omega\, 1$
  $suma_I : D \times D \to D, \quad (\omega, \omega') \rightsquigarrow \omega\, \omega'$, concatenación
- $menor_I = \{(\omega, \omega') \in D \times D \mid \omega \text{ es prefijo de } \omega'\}$

Semántica: Evaluación de términos

La evaluación $v_{I,\sigma}(t)$ de un término t con respecto a una interpretación I y una asignación σ se define como:

$$v_{I,\sigma}(t) = \begin{cases} c_I & \text{si } \mathrm{t} \text{ es una constante } c \\ \sigma(x) & \text{si } \mathrm{t} \text{ es una variable } x \\ f_I(v_{I,\sigma}(t_1), \ldots, v_{I,\sigma}(t_n)) & \text{si } \mathrm{t} \text{ es } f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

La evaluación de un término t es siempre un elemento del dominio:

$$v_{I,\sigma}(t) \in D, \text{ para todo término } t$$

Semántica: Ejemplo de evaluación de un término

Para $\mathcal{C} = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{sig, suma\}$, $\mathcal{R} = \{menor\}$

- $D = \mathbb{N}$
- $0_I = 0$
- $sig_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \rightsquigarrow n+1$
  $suma_I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n,m) \rightsquigarrow n+m$

Para el término $t = suma(sig(0), x)$ y la asignación $\sigma(x) = 3$

$$\begin{aligned}
v_{I,\sigma}(t) &= v_{I,\sigma}\big(\, suma(sig(0),\ x)\,\big) \\
&= suma_I\big(\, v_{I,\sigma}(sig(0)), v_{I,\sigma}(x)\,\big) \\
&= suma_I\big(\, sig_I(0),\ 3\,\big) \\
&= suma_I(0+1,\ 3) \\
&= 1+3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de una fórmula

Si $\sigma : Var \to D$ es una asignación y $d \in D$, $\sigma[x \leftarrow d]$ representa la asignación definida por

$$\sigma[x \leftarrow d](z) = \begin{cases} d & \text{si } z = x \\ \sigma(z) & \text{si si } z \neq x \end{cases}$$

La evaluación $v_{I,\sigma}(\alpha)$ de una fórmula α respecto a I y σ se define como:

- $v_{I,\sigma}(P(t_1, \dots, t_n)) = T$ sii $P_I(v_{I,\sigma}(t_1), \dots, v_{I,\sigma}(t_n)) = T$
- $v_{I,\sigma}(\neg\alpha)$ y $v_{I,\sigma}(\alpha * \beta)$ con $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ se definen como en el caso proposicional
- $v_{I,\sigma}(\forall x\ \alpha) = T$ sii, para todo $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$
- $v_{I,\sigma}(\exists x\ \alpha) = T$ sii, para algún $d \in D$, $v_{I,\sigma[x \leftarrow d]}(\alpha) = T$

La evaluación de una fórmula α es F o T

$$v_{I,\sigma(\alpha)} \in \{F, T\} \text{ para toda fórmula } \alpha$$

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$,
Definimos una interpretación I con:

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1$,
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Evaluación de términos:

- $v_I(m) = m_I = 2$
- $v_I(sig(d)) = sig_I(v_I(d)) = sig_I(d_I) = sig_I(7) = 1$
- $v_I(min(sig(d), m)) = min_I(v_I(sig(d)), v_I(m)) = minimo\{1, 2\} = 1$

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$, con I

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1,$
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Para la fórmula $\alpha = \forall x\, ant(\ell, x)$:

$v_I(\alpha) = T$ porque,
para todo $n \in D$, $ant_I(\ell_I, n) = ant_I(1, n) = T$
(es decir, para todo $n \in D$, $1 \leq n$)

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$, con I

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1,$
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Para la fórmula $\alpha = \forall x\, ant(w, x)$:

$v_I(\alpha) = F$ porque,
para $n = 1 \in D, \quad ant_I(3, n) = F$
(ya que $1 < 3$; podría tomarse también $n = 1$ o $n = 2$)

Semántica: Ejemplo

Para $\mathcal{C} = \{\ell, m, w, j, v, s, d\}$, $\mathcal{F} = \{sig, min\}$ y $\mathcal{R} = \{lab, ant\}$, con I

- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\ell_I = 1,\ m_I = 2,\ w_3 = 3,\ j_I) = 4,\ v_I = 5,\ s_I = 6,\ d_I = 7$
- $sig_I : D \to D, \quad n \rightsquigarrow sig_I(d) \equiv_7 d + 1,$
  $min_I : D \times D \to D, \quad (n, n') \rightsquigarrow minimo\{n, n'\}$
- $lab_I = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq D$
  $ant_I = \{(n, n') \mid n \leq n'\} \subseteq D^2$

Para la fórmula $\alpha = \exists x\, ant(w, x)$:

$v_I(\alpha) = T$ porque,
para $n = 4, \;\; ant_I(3, n) = T$
(para $n = 4, \;\; 3 \leq n$. Podría considerarse $n = 4, 5, 6, 7$)

Semántica de sentencias

- Un término parcialmente evaluado (PE-term) es:
  - una constante c
  - una variable x
  - un elemento del dominio d
  - una expresión $f(t_1, \ldots, t_n)$ con $\delta(f) = n$ siendo cada t_i un término parcialmente evaluado.

  Un PE-term es ground si no tiene variables

- Ejemplo: Dado el dominio $D = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$,
  $f(3,$ ⚄$)$ y $f(f($⚁$, x), 6)$ son PE-terms

- Cualquier término, por ejemplo $f(3, y)$, es también un PE-term.

- Una sentencia es una fbf que no tiene variables libres.
  Una PE-sentencia es una sentencia que admite PE-terms en lugar de términos.

- Ejemplo: $\forall x(P(x) \rightarrow P(f(x,$ ⚄$)))$

Semántica de sentencias

- Si α es un PE-term α ground, la evaluación $v_I(\alpha)$ de α con respecto a una interpretación I se define como:
  - $v_I(c) = c_I$ para cualquier constante c
  - $v_I(d) = d$ para cualquier elemento del dominio $d \in D$
  - $v_I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_I(v_I(t_1), \ldots, v_I(t_n))$
- Una interpretación I satisface una PE-sentencia α, escrito $I \models, \alpha$ cuando:
  - $I \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sii $P_I(v_I(t_1), \ldots, v_I(t_n)) = T$
  - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ como en el caso proposicional
  - $I \models \forall x\ \alpha$ sii $I \models \alpha[x/d]$ para todo $d \in D$
  - $I \models \exists x\ \alpha$ sii $I \models \alpha[x/d]$ para algún $d \in D$

Semántica de sentencias

- Ejemplo. $\forall x\ (Even(x) \to \neg Even(x+1))$. Sea I:
  - $D = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$
  - $1_I = ⚀, 2_I = ⚁, 3_I = ⚂, 4_I = ⚃, 5_I = ⚄, 6_I = ⚅$
  - $d +_I e$ es el resultado de $(d + e - 1) \mod 6 + 1$ usando d, e como los valores númericos en los dados. Por ejemplo: $⚂ +_I ⚃ = ⚀$
  - $Even_I(d) = \{\langle ⚁ \rangle, \langle ⚃ \rangle, \langle ⚅ \rangle\}$

$$
\begin{array}{rl}
 & I \models \forall x\ (Even(x) \to \neg Even(x+1)) \\
\text{sii} & I \models Even(⚀) \to \neg Even(⚀ + 1) \\
\text{and} & I \models Even(⚁) \to \neg Even(⚁ + 1) \\
\text{and} & I \models Even(⚂) \to \neg Even(⚂ + 1) \\
\text{and} & I \models Even(⚃) \to \neg Even(⚃ + 1) \\
\text{and} & I \models Even(⚄) \to \neg Even(⚄ + 1) \\
\text{and} & I \models Even(⚅) \to \neg Even(⚅ + 1)
\end{array}
$$

Semántica de sentencias

- Ejemplo. $\forall x\ (Even(x) \to \neg Even(x+1))$.

$$
\begin{array}{rl}
 & I \models Even(\text{⚀}) \to \neg Even(\text{⚀} + 1) \\
\text{sii} & I \not\models Even(\text{⚀}) \text{ or } I \models \neg Even(\text{⚀} + 1) \\
\text{sii} & \langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚀} +_I 1_I \rangle \notin Even_I \\
\text{sii} & \langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚀} +_I \text{⚀} \rangle \notin Even_I \\
\text{sii} & \underbrace{\langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I}_{\text{true}} \text{ or } \langle \text{⚁} \rangle \notin Even_I
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & I \models Even(\text{⚅}) \to \neg Even(\text{⚅} + 1) \\
\text{sii} & I \not\models Even(\text{⚅}) \text{ or } I \models \neg Even(\text{⚅} + 1) \\
\text{sii} & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚅} +_I 1_I \rangle \notin Even_I \\
\text{sii} & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \langle \text{⚅} +_I \text{⚀} \rangle \notin Even_I \\
\text{sii} & \langle \text{⚅} \rangle \notin Even_I \text{ or } \underbrace{\langle \text{⚀} \rangle \notin Even_I}_{\text{true}}
\end{array}
$$