

Resolución

Pedro Cabalar

Lógica

Grado en Inteligencia Artificial
Universidade da Coruña

8 de abril de 2025

1 Resolución en Lógica Proposicional

2 Resolución en Lógica de Primer Orden

- Permite decidir si una fórmula α es inconsistente.

- Permite decidir si una fórmula α es inconsistente.
- Como primer paso, requiere transformar α en su Forma Normal Conjuntiva (CNF) equivalente, $CNF[\alpha]$.

- La **regla de resolución** es una regla de inferencia definida como sigue:

$$\frac{\alpha \vee p \quad \beta \vee \neg p}{\alpha \vee \beta}$$

La cláusula resultante $\alpha \vee \beta$ se denomina **resolvente**. Una disyunción vacía (o cláusula vacía) se corresponde con $\perp$.

- La **regla de resolución** es una regla de inferencia definida como sigue:

$$\frac{\alpha \vee p \quad \beta \vee \neg p}{\alpha \vee \beta}$$

La cláusula resultante $\alpha \vee \beta$ se denomina **resolvente**. Una disyunción vacía (o cláusula vacía) se corresponde con $\perp$.

- Resultado principal [Robinson65]**: α is insatisfactible sii existe una derivación de $\perp$ aplicando resolución a partir de $CNF[\alpha]$.

- Ejemplo: probar que

$$\alpha : (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow p)$$

es una tautología

- Ejemplo: probar que

$$\alpha : (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow p)$$

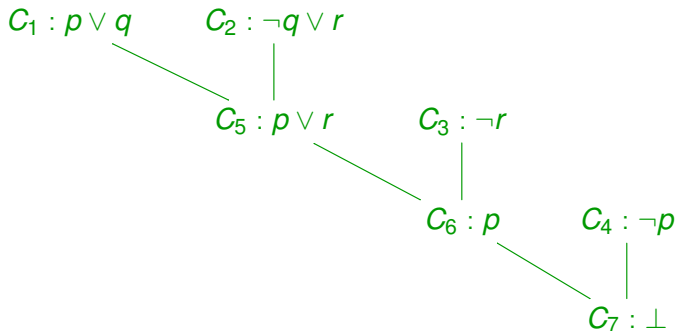
es una tautología

- Primero negamos la fórmula $\neg\alpha$ y luego obtenemos su CNF:

$$\begin{aligned} & \neg((\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow p)) \\ \equiv & \neg(\neg((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg\neg r \vee p)) \\ \equiv & ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \wedge \neg(r \vee p) \\ \equiv & \underbrace{(p \vee q)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg q \vee r)}_{C_2} \wedge \underbrace{\neg r}_{C_3} \wedge \underbrace{\neg p}_{C_4} \end{aligned}$$

Resolución

- Una posible aplicación de resolución sería:



Ejemplo: probar con los conjuntos de cláusulas

- $\{a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, \neg c\}$

Ejemplo: probar con los conjuntos de cláusulas

- $\{a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, \neg c\}$
- ¿ Se puede probar de más de una forma?

Ejemplo: probar con los conjuntos de cláusulas

- $\{a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, \neg c\}$
- ¿ Se puede probar de más de una forma?
- ¿Qué ocurre si tenemos el siguiente conjunto en su lugar?
 $\{a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c\}$

Ejemplo: probar con los conjuntos de cláusulas

- $\{a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c, \neg c\}$
- ¿ Se puede probar de más de una forma?
- ¿Qué ocurre si tenemos el siguiente conjunto en su lugar?
 $\{a \vee b, \neg a \vee c, \neg b \vee c\}$
- Ejemplo: $\{a \vee b, \neg b, a \vee c, \neg a \vee d\}$ ¿es satisfactible?

- Problema: generar todos los posibles resolventes es **inviabile**.

- Problema: generar todos los posibles resolventes es **inviabile**.
- Importante: usar **heurísticas** para explorar sólo una parte del árbol de búsqueda.

- Problema: generar todos los posibles resolventes es **inviabile**.
- Importante: usar **heurísticas** para explorar sólo una parte del árbol de búsqueda.
- Además, a veces se pueden aplicar algunas optimizaciones ...

Optimizaciones

- Eliminar tautologías: $p \vee \neg p \vee \alpha$

Optimizaciones

- Eliminar tautologías: $p \vee \neg p \vee \alpha$
- Subsunción (subsumption): entendiendo la cláusulas como conjuntos de literales, si tenemos $C_1 \subseteq C_2$ decimos que C_1 subsume a C_2 y podemos eliminar esta última.

Optimizaciones

- Eliminar tautologías: $p \vee \neg p \vee \alpha$
- Subsunción (subsumption): entendiendo la cláusulas como conjuntos de literales, si tenemos $C_1 \subseteq C_2$ decimos que C_1 subsume a C_2 y podemos eliminar esta última.
- Literales puros: un literal es puro cuando su complementario no aparece en ninguna cláusula.

Optimizaciones

- Eliminar tautologías: $p \vee \neg p \vee \alpha$
- Subsunción (subsumption): entendiendo la cláusulas como conjuntos de literales, si tenemos $C_1 \subseteq C_2$ decimos que C_1 subsume a C_2 y podemos eliminar esta última.
- Literales puros: un literal es puro cuando su complementario no aparece en ninguna cláusula. Un literal puro no afecta a la satisfactibilidad: podemos fijar arbitrariamente un valor de verdad para su átomo asociado.

Optimizaciones

- Eliminar tautologías: $p \vee \neg p \vee \alpha$
- Subsunción (subsumption): entendiendo la cláusulas como conjuntos de literales, si tenemos $C_1 \subseteq C_2$ decimos que C_1 subsume a C_2 y podemos eliminar esta última.
- Literales puros: un literal es puro cuando su complementario no aparece en ninguna cláusula. Un literal puro no afecta a la satisfactibilidad: podemos fijar arbitrariamente un valor de verdad para su átomo asociado.
- Propagación unitaria (unit propagation): una cláusula unitaria es aquella que sólo contiene un literal.

Optimizaciones

- Eliminar tautologías: $p \vee \neg p \vee \alpha$
- Subsunción (subsumption): entendiendo la cláusulas como conjuntos de literales, si tenemos $C_1 \subseteq C_2$ decimos que C_1 subsume a C_2 y podemos eliminar esta última.
- Literales puros: un literal es puro cuando su complementario no aparece en ninguna cláusula. Un literal puro no afecta a la satisfactibilidad: podemos fijar arbitrariamente un valor de verdad para su átomo asociado.
- Propagación unitaria (unit propagation): una cláusula unitaria es aquella que sólo contiene un literal. Su átomo tiene un valor de certeza fijo y lo podemos simplificar en el resto de cláusulas.

Algoritmos básicos:

- **Davis-Putnam**: elegir un átomo p y aplicar resolución en él de todos los modos posibles. El conjunto de cláusulas resolventes ya no contienen p (¡uno menos!).

Algoritmos básicos:

- **Davis-Putnam**: elegir un átomo p y aplicar resolución en él de todos los modos posibles. El conjunto de cláusulas resolventes ya no contienen p (¡uno menos!).
- **Davis-Putnam-Logemann-Loveland** (DPLL): realizar backtracking sobre el valor de un átomo dado (suponerlo primero cierto y, si falla, suponerlo falso). Es utilizado por la mayoría de solucionadores SAT.

Resolución: estrategias

- **Resolución Lineal**: en cada aplicación, una de las cláusulas debe ser el último resolvente obtenido.

Resolución: estrategias

- **Resolución Lineal**: en cada aplicación, una de las cláusulas debe ser el último resolvente obtenido.
- Si α es insatisfactible, existe alguna cláusula C en $CNF(\alpha)$ tal que se puede derivar $\perp$ a partir de C usando exclusivamente resolución lineal.

Resolución: estrategias

- **Resolución Lineal**: en cada aplicación, una de las cláusulas debe ser el último resolvente obtenido.
- Si α es insatisfactible, existe alguna cláusula C en $CNF(\alpha)$ tal que se puede derivar $\perp$ a partir de C usando exclusivamente resolución lineal.
- **Resolución de Entrada (input)**: se usa siempre una de las cláusulas de entrada originales que aparecen en $CNF(\alpha)$ (es un método incompleto).

Resolución: estrategias

- **Resolución Lineal**: en cada aplicación, una de las cláusulas debe ser el último resolvente obtenido.
- Si α es insatisfactible, existe alguna cláusula C en $CNF(\alpha)$ tal que se puede derivar $\perp$ a partir de C usando exclusivamente resolución lineal.
- **Resolución de Entrada (input)**: se usa siempre una de las cláusulas de entrada originales que aparecen en $CNF(\alpha)$ (es un método incompleto).
- **Resolución unitaria**: se usa siempre una cláusula unitaria (es un método incompleto).

Resolución: estrategias

- **Conjunto de soporte:** detectar algún $S \subset CNF(\alpha)$ para el que sepamos que $CNF(\alpha) \setminus S$ es satisfactible.
- Ejemplo típico: queremos saber si γ se sigue de β , sabiendo que β es consistente. Esto es: ¿ $\beta \wedge \neg\gamma$ inconsistente?

Resolución: estrategias

- **Conjunto de soporte:** detectar algún $S \subset CNF(\alpha)$ para el que sepamos que $CNF(\alpha) \setminus S$ es satisfactible.
- Ejemplo típico: queremos saber si γ se sigue de β , sabiendo que β es consistente. Esto es: ¿ $\beta \wedge \neg\gamma$ inconsistente?
Cuando lo negamos, nos queda $CNF(\beta) \cup \underbrace{CNF(\neg\gamma)}_{\text{support}}$.

Resolución: estrategias

- **Conjunto de soporte**: detectar algún $S \subset CNF(\alpha)$ para el que sepamos que $CNF(\alpha) \setminus S$ es satisfactible.
- Ejemplo típico: queremos saber si γ se sigue de β , sabiendo que β es consistente. Esto es: ¿ $\beta \wedge \neg\gamma$ inconsistente?
Cuando lo negamos, nos queda $CNF(\beta) \cup \underbrace{CNF(\neg\gamma)}_{\text{support}}$.
- **Resolución con soporte S** : usamos siempre al menos una cláusula $C \notin S$. Es un método **completo**.

Resolución

- **Cláusula de Horn:** contiene como mucho un literal positivo.

Resolución

- **Cláusula de Horn:** contiene como mucho un literal positivo.
- Es la base de Prolog. Cada cláusula Horn se puede ver como una regla:

$$\begin{aligned} & p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \neg q_3 \\ \equiv & p \leftarrow q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \\ \equiv & p :- q_1, q_2, q_3. \text{ (una regla)} \end{aligned}$$

p (un hecho)

$$\begin{aligned} & \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \neg q_3 \\ \equiv & \perp \leftarrow q_1 \wedge q_2 \wedge \neg q_3 \\ \equiv & ?- q_1, q_2, q_3. \text{ (la consulta)} \end{aligned}$$

- Si $CNF(\alpha)$ sólo consta de cláusulas de Horn, decidir su satisfactibilidad (HORNSAT) es un problema **P**-completo.

- Si $CNF(\alpha)$ sólo consta de cláusulas de Horn, decidir su satisfactibilidad (HORNSAT) es un problema **P**-completo.
- Las estrategias unitaria, de entrada y lineal se vuelven completas para cláusulas de Horn. Es más, el conjunto de cláusulas negativas (consultas) se puede usar como conjunto de soporte.

1 Resolución en Lógica Proposicional

2 Resolución en Lógica de Primer Orden

- En general, el objetivo es reducir el problema a resolución proposicional

- En general, el objetivo es **reducir el problema a resolución proposicional**
- Para ello, transformamos la fórmula de lógica de primer orden hasta lograr un conjunto de cláusulas CNF sin cuantificadores

- **Forma Normal Prénex:** ningún cuantificador en el ámbito de una conectiva proposicional.

- **Forma Normal Prénex:** ningún cuantificador en el ámbito de una conectiva proposicional. Esto es: todos los **cuantificadores a la izquierda**

- **Forma Normal Prénex**: ningún cuantificador en el ámbito de una conectiva proposicional. Esto es: todos los **cuantificadores a la izquierda**
- En Lógica clásica de Primer Orden, **siempre se puede reducir a FN Prénex**.

- **Forma Normal Prénex**: ningún cuantificador en el ámbito de una conectiva proposicional. Esto es: todos los **cuantificadores a la izquierda**
- En Lógica clásica de Primer Orden, **siempre se puede reducir a FN Prénex**. Hay lógicas en que no (p.ej. intuicionista).

- **Forma Normal Prénex**: ningún cuantificador en el ámbito de una conectiva proposicional. Esto es: todos los **cuantificadores a la izquierda**
- En Lógica clásica de Primer Orden, **siempre se puede reducir a FN Prénex**. Hay lógicas en que no (p.ej. intuicionista).
- Para obtener FN Prénex: primero reducir a **forma normal negativa** ($\neg$ sólo se aplica a átomos) como en caso proposicional, añadiendo:

$$\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$$

$$\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha$$

- Luego, renombrar las variables para tener **una diferente** en cada cuantificador.

Forma Normal Prénex

- Luego, renombrar las variables para tener una diferente en cada cuantificador.
- Finalmente, aplicar:

$$\forall x \alpha(x) \wedge \beta \equiv \forall x (\alpha(x) \wedge \beta)$$

$$\forall x \alpha(x) \vee \beta \equiv \forall x (\alpha(x) \vee \beta)$$

$$\exists x \alpha(x) \wedge \beta \equiv \exists x (\alpha(x) \wedge \beta)$$

$$\exists x \alpha(x) \vee \beta \equiv \exists x (\alpha(x) \vee \beta)$$

con x no libre en β .

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} & (P(y) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow \forall y(R(y) \wedge \exists x A(x, y)) \\ \equiv & \neg P(y) \wedge \forall x \neg Q(x) \vee \forall y(R(y) \wedge \exists x A(x, y)) \\ \equiv & \neg P(y) \wedge \forall x \neg Q(x) \vee \forall z(R(z) \wedge \exists w A(w, z)) \\ \equiv & \underbrace{\forall x \forall z \exists w}_{\text{prefijo}} \underbrace{(\neg P(y) \wedge \neg Q(x) \vee (R(z) \wedge A(w, z)))}_{\text{matriz}} \end{aligned}$$

- Luego, renombrar las variables para tener **una diferente** en cada cuantificador.

Forma Normal Prénex

- Luego, renombrar las variables para tener **una diferente** en cada cuantificador.
- Finalmente, aplicar:

$$\forall x \alpha(x) \wedge \beta \equiv \forall x (\alpha(x) \wedge \beta)$$

$$\forall x \alpha(x) \vee \beta \equiv \forall x (\alpha(x) \vee \beta)$$

$$\exists x \alpha(x) \wedge \beta \equiv \exists x (\alpha(x) \wedge \beta)$$

$$\exists x \alpha(x) \vee \beta \equiv \exists x (\alpha(x) \vee \beta)$$

Forma Normal Prénex

- Luego, renombrar las variables para tener **una diferente** en cada cuantificador.
- Finalmente, aplicar:

$$\forall x \alpha(x) \wedge \beta \equiv \forall x (\alpha(x) \wedge \beta)$$

$$\forall x \alpha(x) \vee \beta \equiv \forall x (\alpha(x) \vee \beta)$$

$$\exists x \alpha(x) \wedge \beta \equiv \exists x (\alpha(x) \wedge \beta)$$

$$\exists x \alpha(x) \vee \beta \equiv \exists x (\alpha(x) \vee \beta)$$

con x no libre en β .

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y)$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists w (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists w (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \forall w \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists w (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \forall w \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x \forall w (x < y \wedge \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists w (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \forall w \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x \forall w (x < y \wedge \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists r \forall w (r < y \wedge \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee \exists t (t = x + y) \\ \equiv & \exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \exists t (\forall y (y < sz) \vee (t = x + y)) \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall y (y < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow \forall u ((u < sz) \vee (t = x + y))] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists x (z = x + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \neg \exists w (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x (x < y \wedge \forall w \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists x \forall w (x < y \wedge \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u [\exists r \forall w (r < y \wedge \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \\ \equiv & \exists t \forall u \forall r \exists w [(r < y \wedge \neg (z = w + y)) \rightarrow (u < sz) \vee (t = x + y)] \end{aligned}$$

Forma Normal Prénex

- En general, la FN Prénex de una fórmula **no es única**. Podemos obtener distintos resultados, pero equivalentes

Forma Normal Prénex

- En general, la FN Prénex de una fórmula **no es única**. Podemos obtener distintos resultados, pero equivalentes
- Ejemplo:

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y) \equiv \forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$$

Forma Normal Prénex

- En general, la FN Prénex de una fórmula **no es única**. Podemos obtener distintos resultados, pero equivalentes
- Ejemplo:

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y) \equiv \forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$$

pero también

$$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists y \forall x (P(x) \vee Q(y))$$

Forma Normal Prénex

- En general, la FN Prénex de una fórmula **no es única**. Podemos obtener distintos resultados, pero equivalentes

- Ejemplo:

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y) \equiv \forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$$

pero también

$$\forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists y \forall x (P(x) \vee Q(y))$$

- Cuidado:** el orden para sacar cuantificadores a la izquierda **hay que respetarlo si afectan a la misma fórmula**

$$\begin{aligned} \forall x P(x) \vee \exists y \forall z Q(y, z) &\equiv \forall x \exists y \forall z (P(x) \vee Q(y, z)) \\ &\not\equiv \forall x \forall z \exists y (P(x) \vee Q(y, z)) \end{aligned}$$

Skolemización

- Objetivo: eliminar los cuantificadores existenciales $\exists x$ de la FN Prénex.

Skolemización

- Objetivo: **eliminar los cuantificadores existenciales $\exists x$** de la FN Prénex. Se reemplazan por **funciones Skolem**.
- Eliminamos $\exists x$ del prefijo y cambiamos x en la matriz por $f(y_1, \dots, y_n)$ donde:

Skolemización

- Objetivo: **eliminar los cuantificadores existenciales $\exists x$** de la FN Prénex. Se reemplazan por **funciones Skolem**.
- Eliminamos $\exists x$ del prefijo y cambiamos x en la matriz por $f(y_1, \dots, y_n)$ donde:
 - ▶ f es un **nuevo nombre de función** que no aparecía antes

Skolemización

- Objetivo: **eliminar los cuantificadores existenciales $\exists x$** de la FN Prénex. Se reemplazan por **funciones Skolem**.
- Eliminamos $\exists x$ del prefijo y cambiamos x en la matriz por $f(y_1, \dots, y_n)$ donde:
 - ▶ f es un **nuevo nombre de función** que no aparecía antes
 - ▶ $y_1, \dots, y_n$ son todas las variables con $\forall y_i$ a la izquierda del $\exists x$ eliminado

Skolemización

- Objetivo: **eliminar los cuantificadores existenciales $\exists x$** de la FN Prénex. Se reemplazan por **funciones Skolem**.
- Eliminamos $\exists x$ del prefijo y cambiamos x en la matriz por $f(y_1, \dots, y_n)$ donde:
 - ▶ f es un **nuevo nombre de función** que no aparecía antes
 - ▶ $y_1, \dots, y_n$ son todas las variables con $\forall y_i$ a la izquierda del $\exists x$ eliminado
 - ▶ Si $n = 0$ usamos una **constante de Skolem c** (función 0-aria).

Skolemización

- Objetivo: eliminar los cuantificadores existenciales $\exists x$ de la FN Prénex. Se reemplazan por **funciones Skolem**.
- Eliminamos $\exists x$ del prefijo y cambiamos x en la matriz por $f(y_1, \dots, y_n)$ donde:
 - f es un **nuevo nombre de función** que no aparecía antes
 - $y_1, \dots, y_n$ son todas las variables con $\forall y_i$ a la izquierda del $\exists x$ eliminado
 - Si $n = 0$ usamos una **constante de Skolem** c (función 0-aria).
- En un ejemplo previo:

$\forall x \forall z \exists w (\neg P(y) \wedge \neg Q(x) \vee (R(z) \wedge A(w, z)))$
se convierte en $\forall x \forall z (\neg P(y) \wedge \neg Q(x) \vee (R(z) \wedge A(f(x, z), z)))$

- Un ejemplo más intuitivo: toda persona tiene una madre.

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \rightarrow \exists y M(y, x)) \\ \equiv & \forall x \exists y(P(x) \rightarrow M(y, x)) \\ \text{se convierte en} & \forall x(P(x) \rightarrow M(\text{madre}(x), x)) \end{aligned}$$

- Un ejemplo más intuitivo: toda persona tiene una madre.

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \rightarrow \exists y M(y, x)) \\ \equiv & \forall x \exists y(P(x) \rightarrow M(y, x)) \\ \text{se convierte en} & \forall x(P(x) \rightarrow M(\text{madre}(x), x)) \end{aligned}$$

- Atención:** α y su skolemización ¡no son equivalentes!

- Un ejemplo más intuitivo: toda persona tiene una madre.

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \rightarrow \exists y M(y, x)) \\ \equiv & \forall x \exists y(P(x) \rightarrow M(y, x)) \\ \text{se convierte en} & \forall x(P(x) \rightarrow M(\text{madre}(x), x)) \end{aligned}$$

- Atención:** α y su skolemización **¡no son equivalentes!**
Sin embargo: α es satisfactible sii su skolemización es satisfactible.

Modelos de Herbrand

- Tomamos una fórmula α , la reducimos a su FN Prénex, skolemizamos y reducimos su matriz a CNF.

Modelos de Herbrand

- Tomamos una fórmula α , la reducimos a su FN Prénex, skolemizamos y reducimos su matriz a CNF.
- Pero entonces, ¿cuántos modelos primer orden tendríamos que considerar?

Modelos de Herbrand

- Tomamos una fórmula α , la reducimos a su FN Prénex, skolemizamos y reducimos su matriz a CNF.
- Pero entonces, ¿cuántos modelos primer orden tendríamos que considerar?
- Como sólo nos interesa satisfactibilidad, podemos restringirlo a modelos de Herbrand.

Modelos de Herbrand

- Tomamos una fórmula α , la reducimos a su FN Prénex, skolemizamos y reducimos su matriz a CNF.
- Pero entonces, ¿cuántos modelos primer orden tendríamos que considerar?
- Como sólo nos interesa satisfactibilidad, podemos restringirlo a modelos de Herbrand.
- Punto clave: en un modelo de Herbrand, cada constante C se interpreta como ella misma $C_I = C$.

Modelos de Herbrand

- Tomamos una fórmula α , la reducimos a su FN Prénex, skolemizamos y reducimos su matriz a CNF.
- Pero entonces, ¿cuántos modelos primer orden tendríamos que considerar?
- Como sólo nos interesa satisfactibilidad, podemos restringirlo a modelos de Herbrand.
- Punto clave: en un modelo de Herbrand, cada constante C se interpreta como ella misma $C_I = C$.
Y lo mismo sucede para todo término sin variables

$$\forall_{I,\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(t_1, \dots, t_n)$$

- El Dominio de Herbrand DH se define como el conjunto de todos los términos sin variables (ground) que se pueden formar.

Modelos de Herbrand

- El Dominio de Herbrand DH se define como el conjunto de todos los términos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Ejemplo: si no tenemos funciones pero tenemos las constantes *Juan, Ann, Ana*, tenemos $DH = \{Juan, Ann, Ana\}$.

Modelos de Herbrand

- El Dominio de Herbrand DH se define como el conjunto de todos los términos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Ejemplo: si no tenemos funciones pero tenemos las constantes *Juan, Ann, Ana*, tenemos $DH = \{Juan, Ann, Ana\}$.
- Ejemplo: si tenemos la función f y la constante 0 , $DH = \{0, f(0), f(f(0)), f(f(f(0))), \dots\}$ es un conjunto infinito.

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Podemos verlo como una *signatura proposicional*.

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Podemos verlo como una *signatura proposicional*.
- Una fórmula α es satisfactible sii el conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas que podemos formar a partir de su Skolemización es satisfactible (en sentido proposicional).

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Podemos verlo como una *signatura proposicional*.
- Una fórmula α es satisfactible sii el conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas que podemos formar a partir de su Skolemización es satisfactible (en sentido proposicional).
- Sin embargo, este conjunto suele ser *infinito* (basta con tener un símbolo de función).

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Podemos verlo como una **signatura proposicional**.
- Una fórmula α es satisfactible sii el conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas que podemos formar a partir de su Skolemización es satisfactible (en sentido proposicional).
- Sin embargo, este conjunto suele ser **infinito** (basta con tener un símbolo de función). Intentar generarlo para resolución no tiene sentido. Ejemplo:

$$[P(f(x)) \vee \neg Q(x)] \wedge Q(y) \wedge \neg P(z)$$

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Podemos verlo como una **signatura proposicional**.
- Una fórmula α es satisfactible sii el conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas que podemos formar a partir de su Skolemización es satisfactible (en sentido proposicional).
- Sin embargo, este conjunto suele ser **infinito** (basta con tener un símbolo de función). Intentar generarlo para resolución no tiene sentido. Ejemplo:

$$[P(f(x)) \vee \neg Q(x)] \wedge Q(y) \wedge \neg P(z)$$

- Idea: podemos mantener las variables y ver qué asignaciones generarían una resolución.

Modelos de Herbrand

- La Base de Herbrand BH se define como el conjunto de todos los átomos sin variables (ground) que se pueden formar.
- Podemos verlo como una **signatura proposicional**.
- Una fórmula α es satisfactible sii el conjunto (posiblemente infinito) de cláusulas que podemos formar a partir de su Skolemización es satisfactible (en sentido proposicional).
- Sin embargo, este conjunto suele ser **infinito** (basta con tener un símbolo de función). Intentar generarlo para resolución no tiene sentido. Ejemplo:

$$[P(f(x)) \vee \neg Q(x)] \wedge Q(y) \wedge \neg P(z)$$

- Idea: podemos mantener las variables y ver qué asignaciones generarían una resolución. Ejemplo: tomando $z = f(x)$ e $y = x$ obtenemos cláusula vacía

Unificador más general (Robinson)

- Dado un conjunto de expresiones E , obtenemos un par de desacuerdo $\langle E_1, E_2 \rangle$ buscando de izquierda a derecha el primer símbolo distinto y tomando su subexpresión correspondiente.

Unificador más general (Robinson)

- Dado un conjunto de expresiones E , obtenemos un par de desacuerdo $\langle E_1, E_2 \rangle$ buscando de izquierda a derecha el primer símbolo distinto y tomando su subexpresión correspondiente.
- Ejemplo: dados $P(f(x), y)$ y $P(f(g(a, z), f(z)))$ un par de desacuerdo sería $\langle x, g(a, z) \rangle$.

Unificador más general (Robinson)

- Dado un conjunto de expresiones E , obtenemos un par de desacuerdo $\langle E_1, E_2 \rangle$ buscando de izquierda a derecha el primer símbolo distinto y tomando su subexpresión correspondiente.
- Ejemplo: dados $P(f(x), y)$ y $P(f(g(a, z), f(z)))$ un par de desacuerdo sería $\langle x, g(a, z) \rangle$.
- Si 2 literales se pueden unificar, existe un unificador más general que se calcula:

```
 $\sigma := [];$   
while  $|E| > 1$  {  
     $D :=$  par de desacuerdo  $E$ ;  
    if  $D$  contiene algún  $x$  y un término  $t$  sin contener  $x$  {  
         $E := E[x/t];$   
         $\sigma := \sigma \cdot [x/t];$  }  
    else return 'no-unificable';  
}
```

Ejemplo completo

Ejemplo

Usar resolución para comprobar si, de las premisas:

$$P1. \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x))$$

$$P2. \forall z \exists y P(z, y)$$

se sigue la conclusión:

$$C. \exists w Q(w)$$

Ejemplo completo

Ejemplo

Usar resolución para comprobar si, de las premisas:

$$P1. \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x))$$

$$P2. \forall z \exists y P(z, y)$$

se sigue la conclusión:

$$C. \exists w Q(w)$$

Ejemplo completo

Ejemplo

Usar resolución para comprobar si, de las premisas:

$$P1. \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x))$$

$$P2. \forall z \exists y P(z, y)$$

se sigue la conclusión:

$$C. \exists w Q(w)$$

Resolución: comprobaremos si $P1 \wedge P2 \wedge \neg C$ es insatisfactible

$$P1 = \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x))$$

Forma normal Prénex

$$\begin{aligned} P1 &= \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x (\forall u \exists y P(u, y) \rightarrow Q(x)) \end{aligned}$$

Forma normal Prénex

$$\begin{aligned} P1 &= \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x (\forall u \exists y P(u, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x)) \end{aligned}$$

Forma normal Prénex

$$\begin{aligned} P1 &= \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x (\forall u \exists y P(u, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x)) \\ P2 &= \forall z \exists y P(z, y) \end{aligned}$$

Forma normal Prénex

$$\begin{aligned} P1 &= \forall x (\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x (\forall u \exists y P(u, y) \rightarrow Q(x)) \\ &\equiv \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x)) \end{aligned}$$

$$P2 = \forall z \exists y P(z, y)$$

$$\begin{aligned} \neg C &= \neg \exists w Q(w) \\ &\equiv \forall w \neg Q(w) \end{aligned}$$

$$P1 = \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x))$$

$$\begin{aligned}P1 &= \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x)) \\SK(P1) &= \neg P(f(x), y) \vee Q(x)\end{aligned}$$

$$P1 = \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x))$$

$$SK(P1) = \neg P(f(x), y) \vee Q(x)$$

$$P2 = \forall z \exists y P(z, y)$$

$$SK(P2) = P(z, g(z))$$

$$P1 = \forall x \exists u \forall y (\neg P(u, y) \vee Q(x))$$

$$SK(P1) = \neg P(f(x), y) \vee Q(x)$$

$$P2 = \forall z \exists y P(z, y)$$

$$SK(P2) = P(z, g(z))$$

$$\neg C = \forall w \neg Q(w)$$

$$SK(\neg C) = \neg Q(w)$$

Resolución (con unificación)

