Decisión Binaria

Pedro Cabalar

Lógica
Grado en Inteligencia Artificial
Universidade da Coruña

April 8, 2025

1 Árboles de Decisión Binaria

Decisión Binaria

- Problema de decisión binaria = elección entre dos alternativas
- Ejemplo: condicional `if x>10 then a else b`. En Python:

```
if x>0:
    a
else:
    b
```

Decisión Binaria

- Problema de decisión binaria = elección entre dos alternativas
- Ejemplo: condicional `if x>10 then a else b`. En Python:

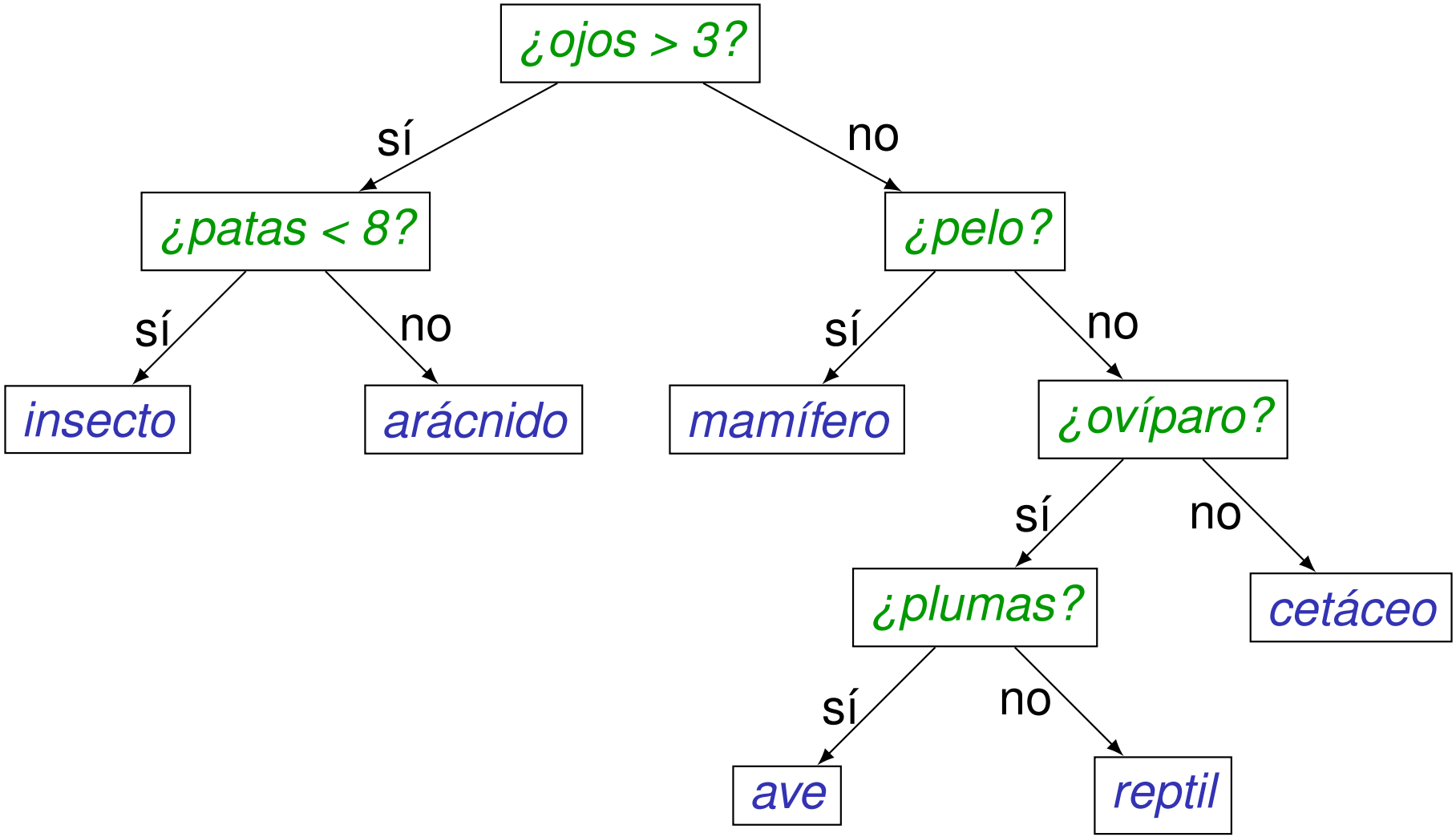
```
if x>0:
    a
else:
    b
```

Definición (Árbol de decisión binaria)

Es un árbol binario donde:

- Todo nodo no hoja tiene asociada una condición o decisión binaria sobre una variable (ej. $x \geq 10$) y tiene siempre dos hijos: uno si la respuesta es sí y otro si es no
- Todo nodo hoja proporciona una clasificación o decisión final

Ejemplo: clasificando animales



Árboles de Decisión para aprendizaje

- Árbol de decisión = en inglés Decision Tree (DT)

Árboles de Decisión para aprendizaje

- Árbol de decisión = en inglés Decision Tree (DT)
- Existen algoritmos de aprendizaje automático [Quinlan 1979] capaces de construir un DT a partir de un conjunto de ejemplos preclasificados

Árboles de Decisión para aprendizaje

- Árbol de decisión = en inglés Decision Tree (DT)
- Existen algoritmos de aprendizaje automático [Quinlan 1979] capaces de construir un DT a partir de un conjunto de ejemplos preclasificados
- Esos algoritmos intentan detectar primero las preguntas relevantes = las que suponen una ganancia de información

Árboles de Decisión para aprendizaje

- Árbol de decisión = en inglés Decision Tree (DT)
- Existen algoritmos de aprendizaje automático [Quinlan 1979] capaces de construir un DT a partir de un conjunto de ejemplos preclasificados
- Esos algoritmos intentan detectar primero las preguntas relevantes = las que suponen una ganancia de información
- Ejemplo online: juego de preguntas y respuestas Akinator (`https://en.akinator.com/`)

Árboles de Decisión Booleanos

- Cualquier función Booleana (fórmula proposicional) se puede representar como un DT

Árboles de Decisión Booleanos

- Cualquier función Booleana (fórmula proposicional) se puede representar como un DT
- Nodo no hoja: no hay variables numéricas:
  la preguntas es siempre sobre alguna proposición

Árboles de Decisión Booleanos

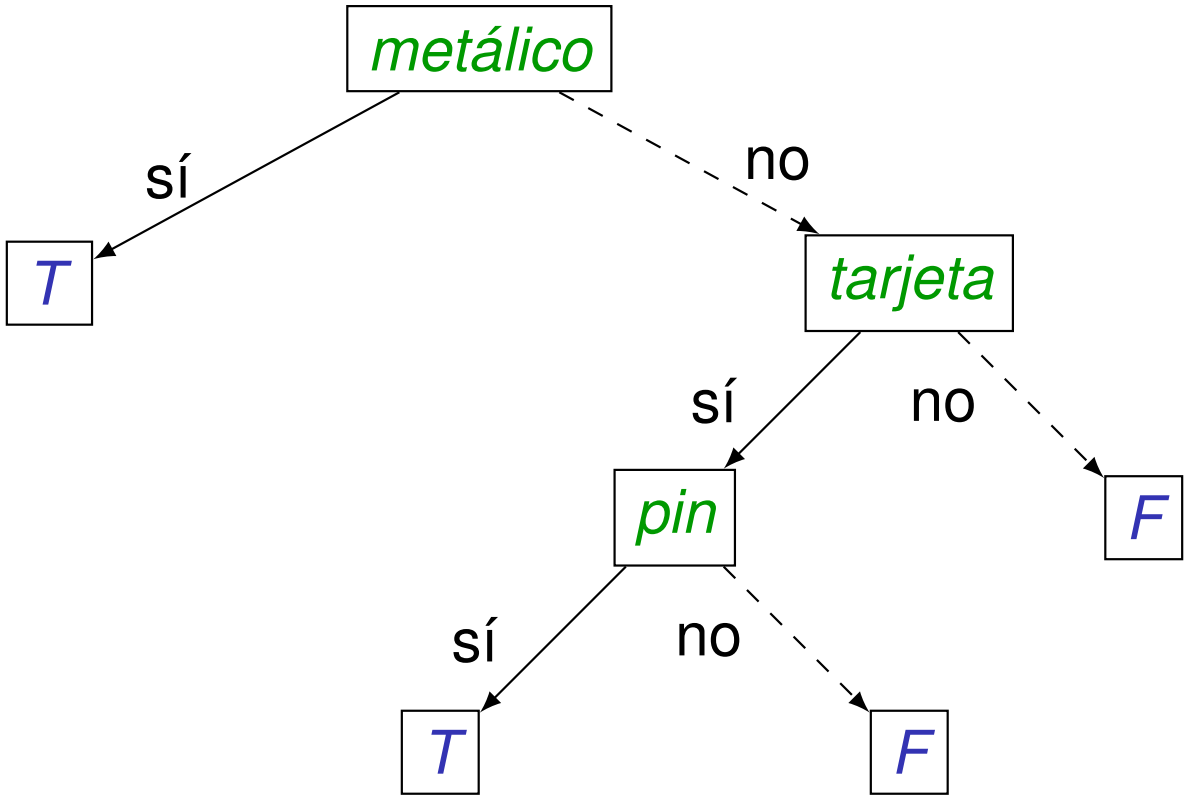
- Cualquier función Booleana (fórmula proposicional) se puede representar como un DT
- Nodo no hoja: no hay variables numéricas:
  la preguntas es siempre sobre alguna proposición
- Nodo hoja: contiene un valor
  - T = true = cierto = el camino seguido es modelo
  - F = false = falso = el camino seguido es contramodelo

Árboles de Decisión Booleanos

- Ejemplo: el pago es válido cuando $\textit{metálico} \vee (\textit{tarjeta} \wedge \textit{pin})$

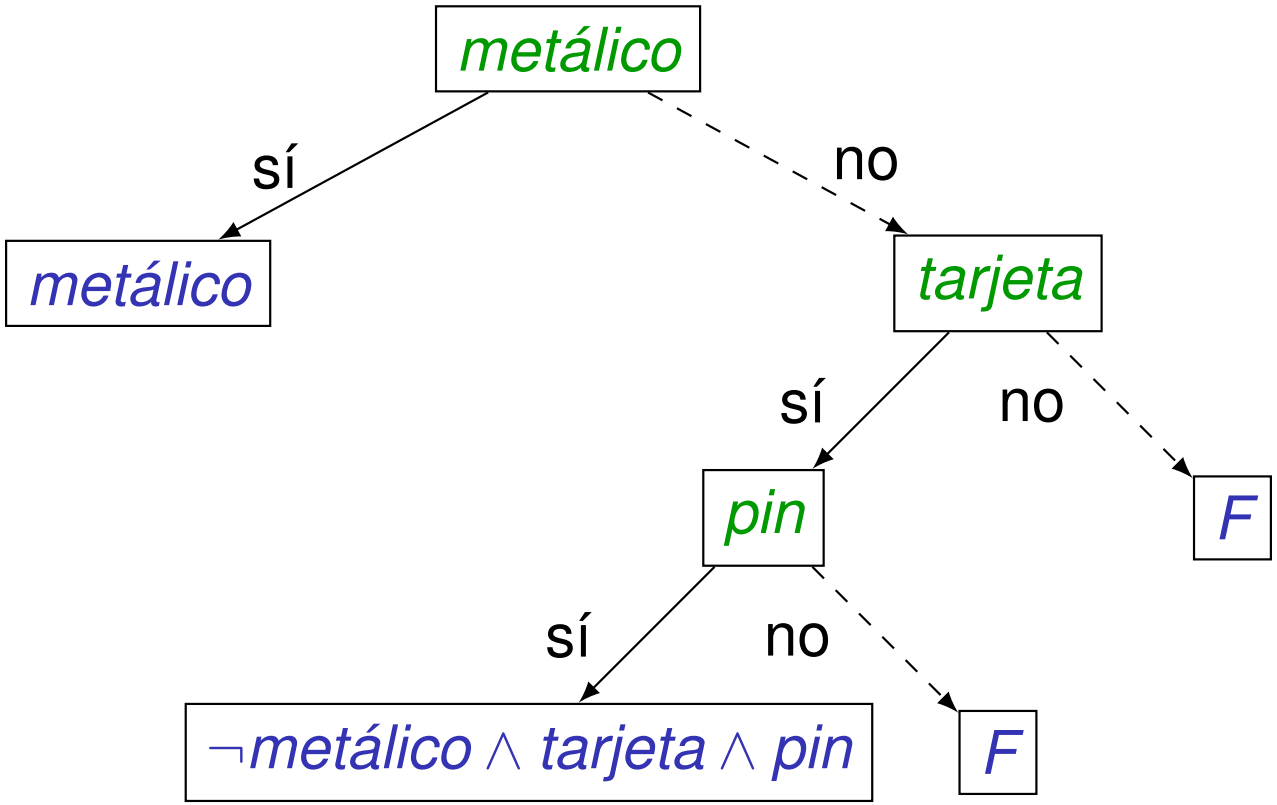
Árboles de Decisión Booleanos

- Ejemplo: el pago es válido cuando $metálico \vee (tarjeta \wedge pin)$



Árboles de Decisión Booleanos

- Ejemplo: el pago es válido cuando $metálico \vee (tarjeta \wedge pin)$

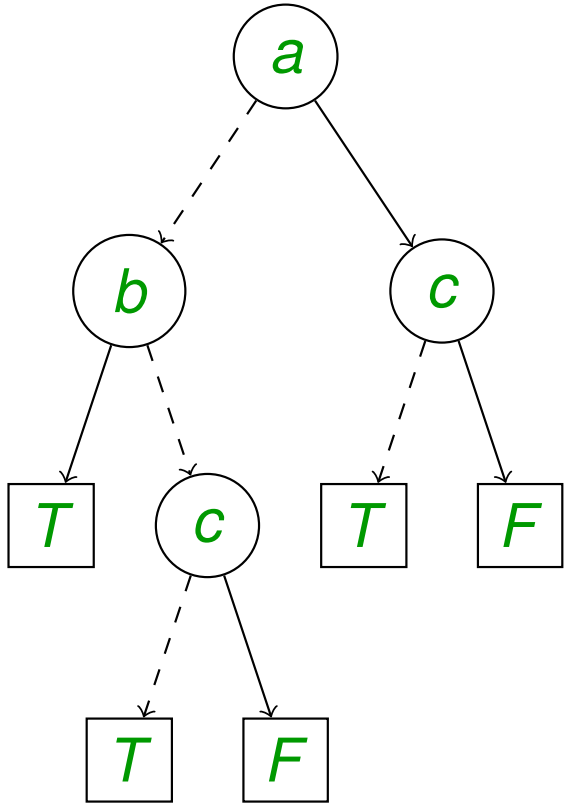


Árboles de Decisión Booleanos

- En ocasiones, tenemos fragmentos de un árbol (subárboles) que se repiten

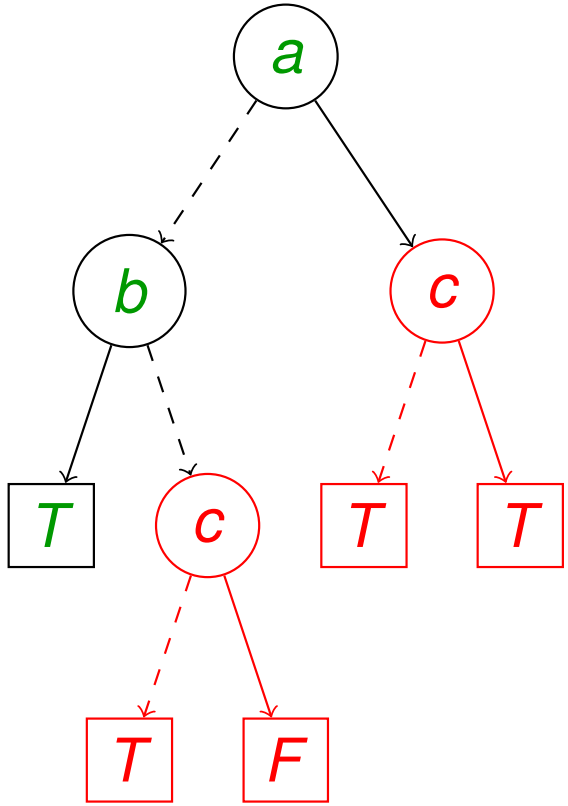
Árboles de Decisión Booleanos

- En ocasiones, tenemos fragmentos de un árbol (subárboles) que se repiten
- Ejemplo: el subárbol de *c* se repite



Árboles de Decisión Booleanos

- En ocasiones, tenemos fragmentos de un árbol (subárboles) que se repiten
- Ejemplo: el subárbol de *c* se repite



Árboles de Decisión Booleanos

- En ocasiones, tenemos fragmentos de un árbol (subárboles) que se repiten
- Ejemplo: el subárbol de *c* se repite

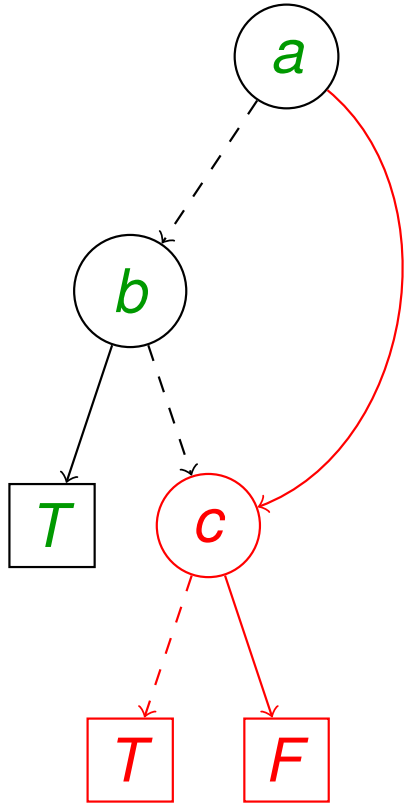


Diagrama de Decisión Binario

Definición (Diagrama de Decisión Binario)

Es un grafo dirigido acíclico que cumple:

- *Tiene un nodo raíz único*
- *Todo nodo no terminal tiene asociada una proposición p y dos arcos salientes: uno (punteado) si p es falsa y otro (continuo) si p es cierta*
- *Todo nodo terminal contiene T (cierto) o F (falso)*

Diagrama de Decisión Binario

Definición (Diagrama de Decisión Binario)

Es un grafo dirigido acíclico que cumple:

- *Tiene un nodo raíz único*
- *Todo nodo no terminal tiene asociada una proposición p y dos arcos salientes: uno (punteado) si p es falsa y otro (continuo) si p es cierta*
- *Todo nodo terminal contiene T (cierto) o F (falso)*

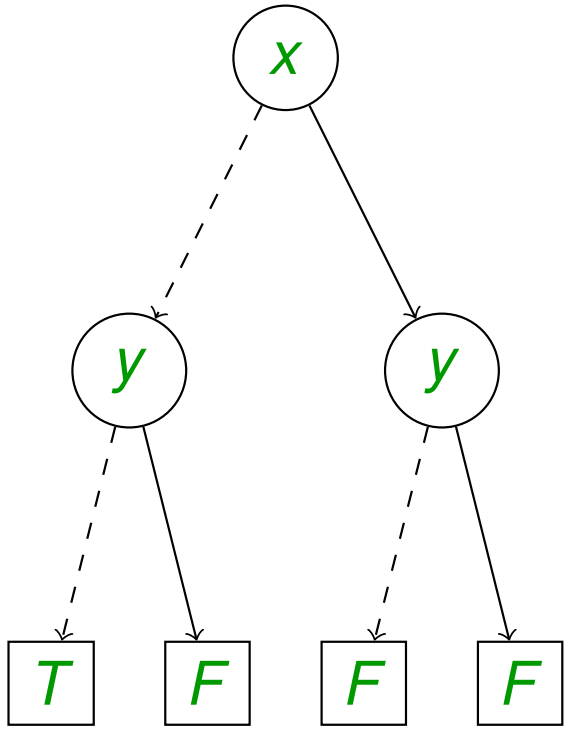
Definición (Diagrama de Decisión Binario Reducido y Ordenado)

En inglés Reduced Ordered Binary Decision Diagram (RO)BDD.
Es un diagrama de decisión binario donde además

- *Reducido = No contiene redundancia*
- *Ordenado = Las proposiciones siempre siguen el mismo orden fijo*

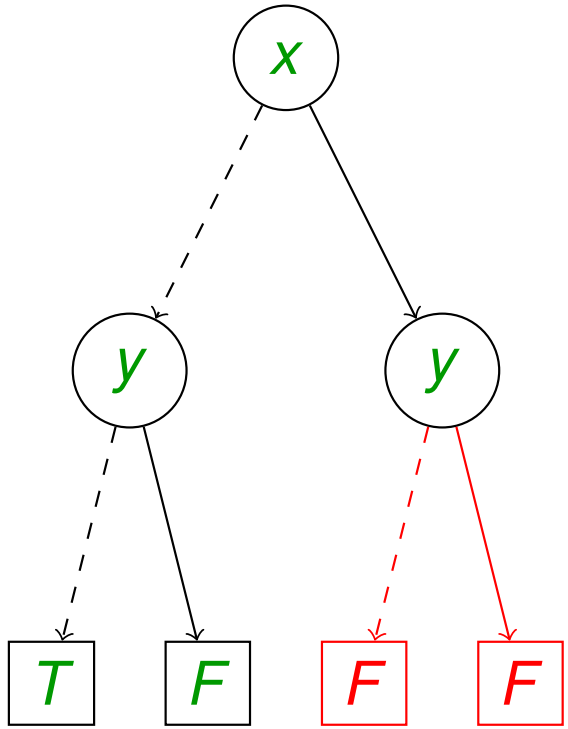
Reducción de BDDs

Regla 1: eliminar terminales duplicados



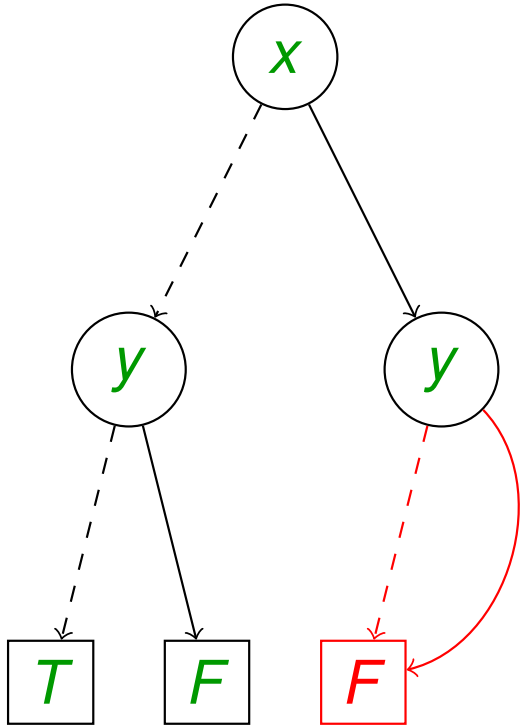
Reducción de BDDs

Regla 1: eliminar terminales duplicados



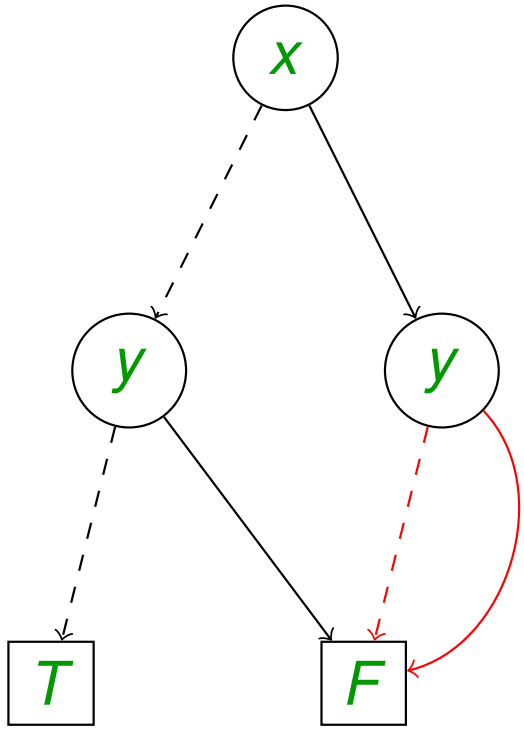
Reducción de BDDs

Regla 1: eliminar terminales duplicados



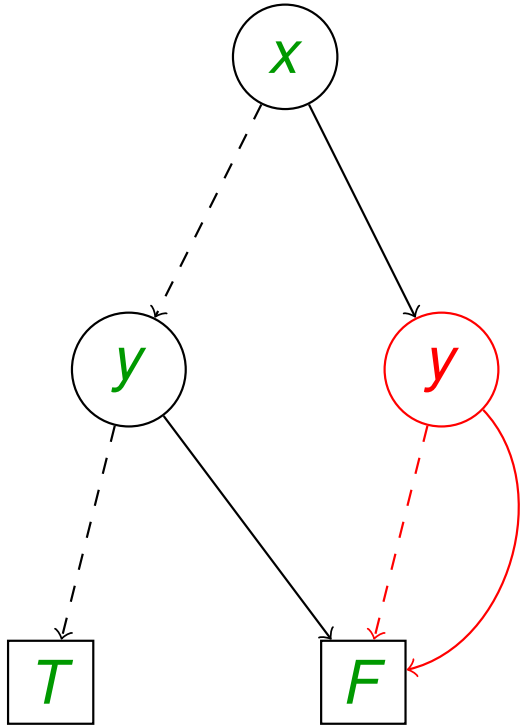
Reducción de BDDs

Regla 1: eliminar terminales duplicados



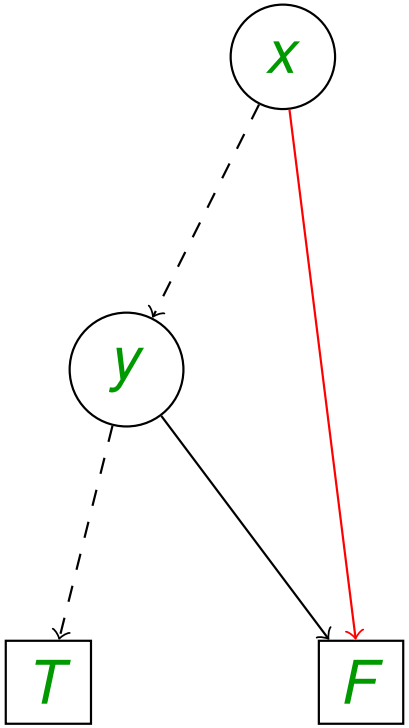
Reducción de BDDs

Regla 2: eliminar comprobaciones redundantes



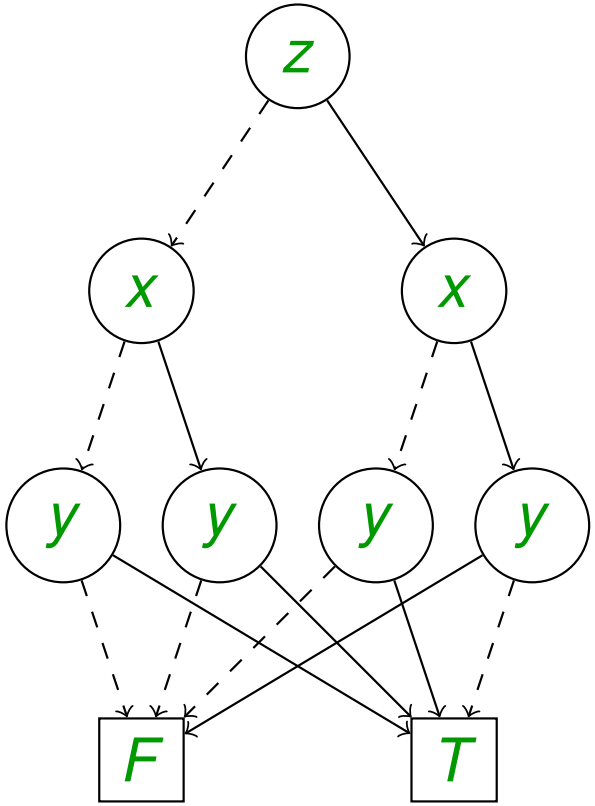
Reducción de BDDs

Regla 2: eliminar comprobaciones redundantes



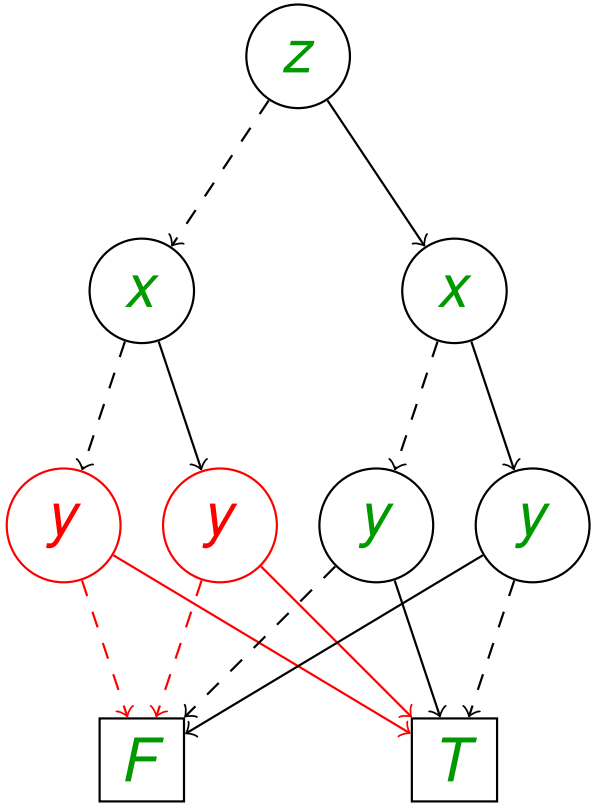
Reducción de BDDs

Regla 3: eliminar no terminales duplicados



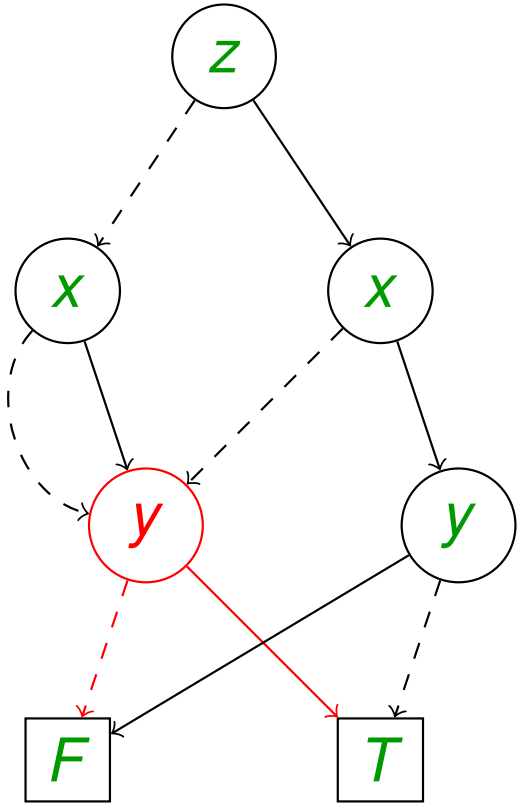
Reducción de BDDs

Regla 3: eliminar no terminales duplicados



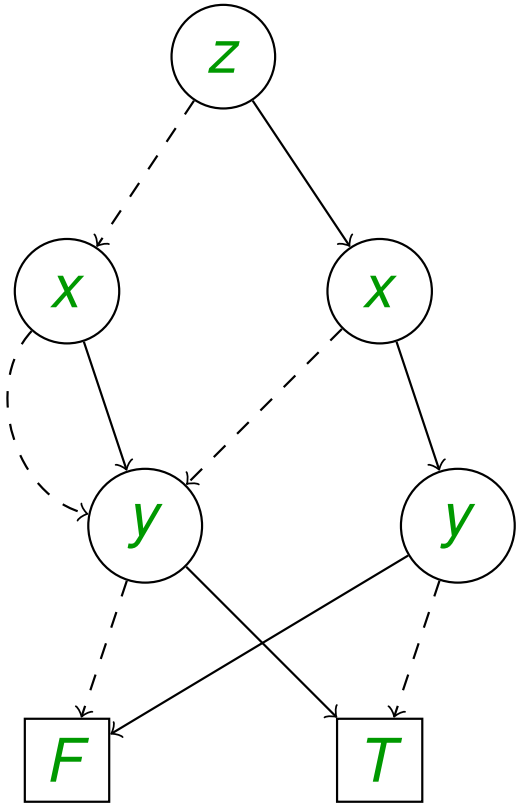
Reducción de BDDs

Regla 3: eliminar no terminales duplicados



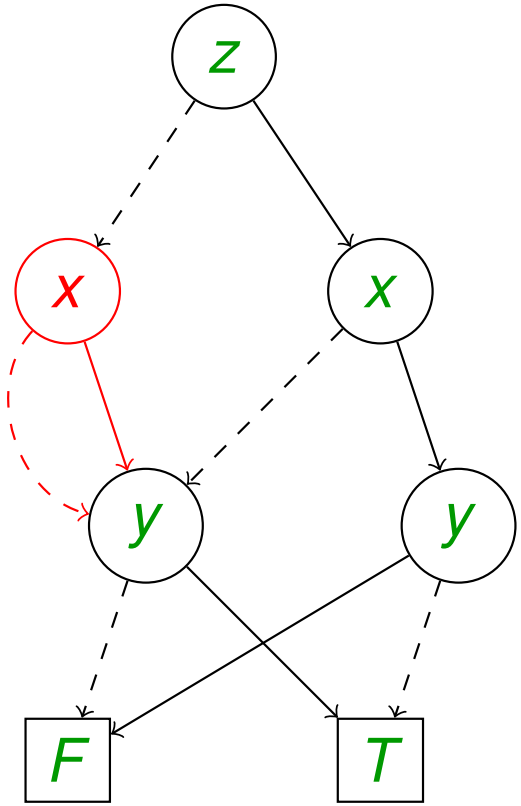
Reducción de BDDs

Repetimos reglas 1, 2, 3 hasta que no se pueda reducir más



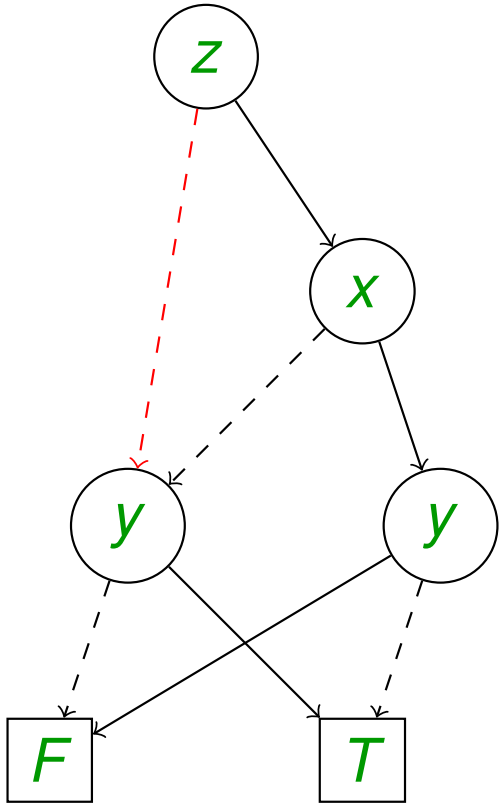
Reducción de BDDs

Repetimos reglas 1, 2, 3 hasta que no se pueda reducir más



Reducción de BDDs

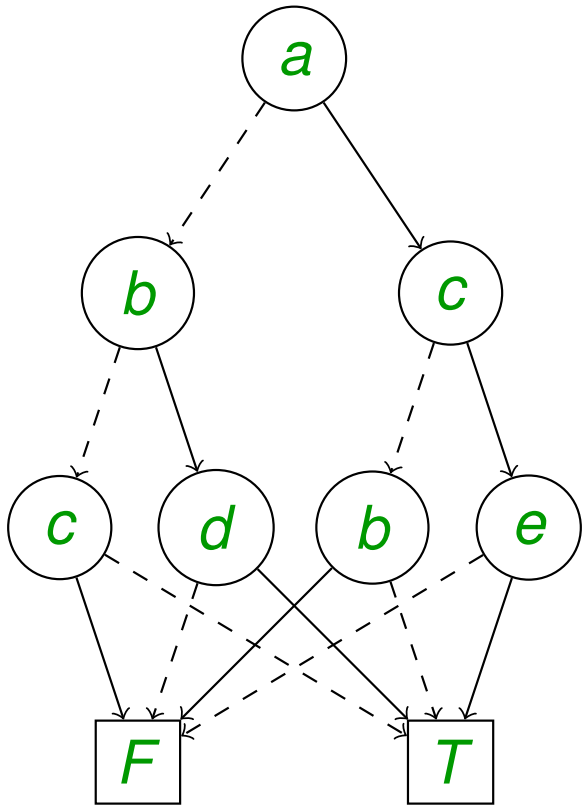
Repetimos reglas 1, 2, 3 hasta que no se pueda reducir más



* Ejemplo extraído del curso “Formal Verification” de Jacques Fleuriot University of Edinburgh, UK

Orden de variables

- En general, el orden en que aparecen las proposiciones puede variar de un camino a otro



Tenemos un camino $a \to b \to c \to F$ y otro $a \to c \to b \to F$

Orden de variables

- Decimos que el BDD es ordenado si se respeta siempre un orden fijo de las variables

Orden de variables

- Decimos que el BDD es ordenado si se respeta siempre un orden fijo de las variables

Teorema

Dado un orden de variables, toda función Booleana tiene una representación única (o canónica) como ROBDD.

Orden de variables

- Decimos que el BDD es ordenado si se respeta siempre un orden fijo de las variables

Teorema

Dado un orden de variables, toda función Booleana tiene una representación única (o canónica) como ROBDD.

- Como consecuencia: dos fórmulas son equivalentes sii sus ROBDD coinciden.

Orden de variables

- Decimos que el BDD es ordenado si se respeta siempre un orden fijo de las variables

Teorema

Dado un orden de variables, toda función Booleana tiene una representación única (o canónica) como ROBDD.

- Como consecuencia: dos fórmulas son equivalentes sii sus ROBDD coinciden.
- El orden de variables puede impactar significativamente en el tamaño del BDD.

Orden de variables

- Decimos que el BDD es ordenado si se respeta siempre un orden fijo de las variables

Teorema

Dado un orden de variables, toda función Booleana tiene una representación única (o canónica) como ROBDD.

- Como consecuencia: dos fórmulas son equivalentes sii sus ROBDD coinciden.
- El orden de variables puede impactar significativamente en el tamaño del BDD.
- Encontrar el orden óptimo (que minimiza el tamaño del BDD) es un problema NP-completo

Orden de variables

- Decimos que el BDD es ordenado si se respeta siempre un orden fijo de las variables

Teorema

Dado un orden de variables, toda función Booleana tiene una representación única (o canónica) como ROBDD.

- Como consecuencia: dos fórmulas son equivalentes sii sus ROBDD coinciden.
- El orden de variables puede impactar significativamente en el tamaño del BDD.
- Encontrar el orden óptimo (que minimiza el tamaño del BDD) es un problema NP-completo
- Prueba a generar BDDs en esta página:
  `https://eecs.ceas.uc.edu/~weaversa/BDD_Visualizer.html`