Tema 1: Cálculo de secuentes

Lógica

Curso 2024–2025

Demostración

Una demostracion (matematica) es una justificacion de una sentencia (la conclusion de la demostracion). La demostracion puede usar algunas proposiciones que se asumen validas (las premisas).

Motivación

- ¿Por que necesitamos el cálculo deductivo?
  - En general, es dificil determinar $\{A_1, \ldots A_n\} \models B$ por medios semánticos.
    - ⋆ Constatar la corrección de un argumento puede ser muy costoso.
- Altenativa: determinar que B se deduce de $\{A_1 \ldots A_n\}$ por medios sintácticos: $\{A_1, \ldots A_n\} \vdash B$
  - Hallar un procedimiento que nos permita verificar una argumentación paso a paso, manipulando los símbolos de las fórmulas, sabiendo que cada paso es válido.
- El análisis de la corrección de un argumento por medios sintácticos se hace siempre en un contexto formal, denominado sistema formal.
- En un sistema formal los símbolos carecen de significado, y al manipularlos hemos de ser cuidadosos y no presuponer nada sobre sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema.

Sistemas formales

- Un sistema formal de prueba o demostración consiste en:
  - Un lenguaje formal (alfabeto y reglas sintácticas de constucción de fórmulas).
  - Un conjunto de axiomas lógicos (fórmulas válidas sin prueba, podría ser vacío).
  - Un conjunto de reglas de inferencia para demostrar fórmulas.
  - Una definición de prueba o demostración.
- Una teoría T es un sistema formal ampliado con un conjunto Γ de axiomas o premisas (es decir, que se consideran como verdad): $T[\Gamma]$.
  - Si $\Gamma = \emptyset$ entonces T es la teoría básica del sistema formal.

Sistemas formales: Propiedades

Corrección: Teorema de validez

Todos los teoremas de $T[\Gamma]$ son consecuencias lógicas de Γ, es decir si $T[\Gamma] \vdash B$ entonces $\Gamma \models B$.

Completitud: Teorema de completitud

Dada una teoría $T[\Gamma]$, todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de $T[\Gamma]$, es decir si $\Gamma \models B$ entonces $T[\Gamma] \vdash B$.

Si el cálculo es correcto y completo entonces $\vdash$ y $\models$ son equivalentes.

Secuentes en Lógica

El cálculo secuentes es un sistema formal (conjunto de reglas) con el que se puede derivar la validez de una fórmula mediante la manipulación de fórmulas puramente simbólicas.

En lugar de manejar fórmulas, transformamos expresiones como $\Gamma \vdash \Delta$ que se convierten en objetos del metalenguaje.

Estas reglas se utilizan para demostrar la verdad de las declaraciones tanto en lógica proposicional como en lógica de primer orden.

Este sistema, junto con deducción natural, fue creado y diseñado en $1930's$ por Gerhard Gentzen: matemático alemán (1909 - 1945).

Secuentes en Lógica

Fue diseñado para buscar un estilo de prueba que permita implementación directa. De hecho, los sistemas implementados de prueba automática (PVS, Coq, . . .) utilizan sistema de secuentes.

En lineas generales se basa en considerar un objetivo inicial acorde con el problema que se quiere resolver, y descomponerlo en subobjetivos cada vez más simples hasta llegar a situaciones cuya solución sea trivial.

$$\frac{\textit{Secuentes subobjetivos}}{\textit{Secuente objetivo}}\ [\text{Regla}]$$

Noción de secuente

Un secuente es un par de la forma $\Gamma \vdash \Delta$ donde Γ y Δ son multiconjuntos finitos de fórmulas. La parte izquierda Γ se llama antecedente; la parte derecha Δ se llama consecuente.

El secuente expresa que Δ se deduce de Γ

Ejemplos de secuentes:

- $\vdash A, A$
- $A \vdash$
- $A \vdash C$
- $A \vdash A$
- $A, A, A, B \vdash B, C$

Fórmula asociada a un secuente

La fórmula asociada al secuente $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B_1, B_2, \ldots, B_k$ es:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

Intuitivamente: Si todas las fórmulas del antecedente son ciertas, entonces alguna del consecuente también lo es.

Semántica de un secuente

Un secuente $A_1, A_2, \ldots A_n \vdash B_1, B_2, \ldots B_k$ es válido si, y sólo si, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee B_2, \vee \ldots \vee B_k$ es una fórmula válida.

Notación del cálculo de secuentes

- Sintaxis: $\Gamma \vdash \Delta$, con Γ y Δ conjuntos de fórmulas.
- Semántica de $\Gamma \to \Delta$: $\bigwedge \Gamma \longrightarrow \bigvee \Delta$
- Antecedente de $\Gamma \vdash \Delta$: Γ
- Consecuente de $\Gamma \vdash \Delta$: Δ

Representación de reglas de secuentes

El cálculo de secuentes está diseñado para realizar **pruebas hacia atrás**. En tal estilo, una conjetura dada se **descompone** en subobjetivos, emparejando la conclusión de alguna de las reglas de inferencia con la conjetura.

Los subobjetivos a su vez pueden ser reducido a otros subobjetivos, y así sucesivamente,hasta alcanzar el esquema de axioma.

$$\frac{\textit{Secuentes subobjetivos}}{\textit{Secuente objetivo}}\ [\mathrm{Regla}]$$

Regla de corte

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \ \vdash \ \Delta, \Delta'} \quad \text{(cut)}$$

Regla del axioma

Un axioma es un secuente en el que aparece una misma fórmula en el antecedente y en el consecuente

$$\dfrac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta}\ [\mathrm{Ax}]$$

Intuitivamente: Cualquier secuente en el que una misma fórmula α aparezca tanto en el antecedente como en el consecuente es cierto y no genera ningún subobjetivo.

Antecedente falso.

$$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ [\mathrm{L}_\bot]$$

Reglas de cálculo

- El resto de las reglas del cálculo de secuentes indican cómo descomponer una fórmula del secuente objetivo (parte inferior de la regla) obteniendo un conjunto de secuentes subobjetivos (parte superior de la regla).

- Las reglas se clasifican según el tipo de fórmula en cuestión y si ésta se encuentra en el antecedente o en el consecuente del objetivo.

Reglas estructurales

Debilitamiento, contracción y permutación.

Izquierda	Derecha
$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}$ [WL]	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}$ [WR]
$\dfrac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}$ [CL]	$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}$ [CR]
$\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha \vdash \Delta}$ [PL]	$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \beta, \alpha, \Delta}$ [PR]

Reglas de la negación

Izquierda	Derecha
$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta}\ [\neg L]$	$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Delta}\ [\neg R]$

Reglas de la disyunción

Izquierda	Derecha
$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta}\ [\vee \mathrm{L}]$	$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}\ [\vee \mathrm{R}]$

Regla de la conjunción

Izquierda	Derecha
$\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ [\wedge\mathrm{L}]$	$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta}\ [\wedge\mathrm{R}]$

Regla de la implicación

Izquierda	**Derecha**
$\dfrac{\Gamma, \beta \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \alpha \to \beta \vdash \Delta}\ [\to \mathrm{L}]$	$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta}\ [\to \mathrm{R}]$

Regla de la equivalencia

Izquierda	Derecha
$\dfrac{\Gamma, \alpha \to \beta, \beta \to \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \Delta}\ [\leftrightarrow \mathrm{L}]$	$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta \to \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \Delta}\ [\leftrightarrow \mathrm{R}]$

Proceso de prueba

Para demostrar la validez de una fórmula **F** mediante el cálculo de secuentes:

- Considerar **F** como secuente objetivo inicial.
- Se van aplicando las reglas dando lugar a nuevos subobjetivos.
- El proceso se repite hasta que todos los subobjetivos han sido eliminados mediante la Regla del Axioma. En ese caso, la fórmula **F** es válida.
- Si se alcanza un subobjetivo al que no puede aplicarse ninguna regla, entonces **F** no es válida

Secuentes versus tablas semánticas

- Se dice que una prueba es analítica si no hace uso de la regla de corte.
- Cualquier prueba analítica en cálculo de secuentes tiene un método dual de tableaux.
- Idea: invertir la prueba de secuentes de abajo a arriba. Puede ser vista como una tabla semántica.
- Dado $\Gamma \vdash \Delta$ pensamos su prueba reducción al absurdo. Se define un conjunto asociado $\Gamma \cup \neg\Delta$, i.e., $\Gamma \cup \{\neg\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.
- Diferentes sentencias pueden tener el mismo conjunto asociado: tanto $\neg A \vdash B$ como $\vdash A, B$ tienen como conjunto asociado $\{\neg A, \neg B\}$.
- Para obtener la tabla semántica, en la prueba de secuentes, se sustituyen las sentencias por conjuntos asociados e invertimos el diagrama.

Secuentes versus tablas semánticas

- Ejemplo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}}{\neg A \wedge \neg B, A \vdash} \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash}}{\neg A \wedge \neg B, B \vdash}}{\dfrac{A \vee B, \neg A \wedge \neg B \vdash}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}}
$$

¿se convierte en? . . .

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg A \wedge \neg B, \neg\neg(A \vee B) & \\
 & | & \\
 & A \vee B, \neg A \wedge \neg B & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\neg A \wedge \neg B, A & & \neg A \wedge \neg B, B \\
| & & | \\
\neg A, A & & \neg B, B
\end{array}
$$

Secuentes versus tablas semánticas

- Existen sistemas de tablas semánticas no analíticos, homólogos a los del cálculos de secuentes no analíticos.
- No satisfacen la propiedad de subfórmula, es decir, no es necesario que cada nodo de la tabla semántica sea una subfórmula de la raíz.

El cálculo de secuentes proposicional

Izquierda	**Derecha**
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}\ [\neg\mathrm{I}]$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}\ [\neg\mathrm{D}]$
$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}\ [\vee\mathrm{I}]$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}\ [\vee\mathrm{D}]$
$\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ [\wedge\mathrm{I}]$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\ [\wedge\mathrm{D}]$
$\dfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}\ [\to \mathrm{I}]$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}\ [\to \mathrm{D}]$
$\dfrac{\Gamma, A \to B, B \to A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \leftrightarrow B \Rightarrow \Delta}\ [\leftrightarrow \mathrm{I}]$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B \to A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B, \Delta}\ [\leftrightarrow \mathrm{D}]$

$$\dfrac{\Gamma \Longrightarrow A, \Delta \quad \Gamma, A, \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}\ [\mathrm{Corte}]$$

Secuentes en Lógica de primer orden

Aunque en la lógica de primer orden, las tablas semánticas (o cualquier otro método) no proporcionan algoritmos generales para determinar propiedades lógicas, la extensión al cálculo de predicados del método de secuentes permite resolver algunas cuestiones.

A las reglas para el cálculo de proposiciones, es preciso añadir cuatro más, para los cuantificadores.

Al contrario que en el cálculo proposicional, donde no importa el orden de aplicación de las reglas en el cálculo de predicados es más complicado. Podría perderse la ocasión de cerrar una deducción si no se emplean juiciosamente las reglas.

Reglas y tácticas para cuantificadores

Izquierda	Derecha
$\dfrac{\Gamma, \alpha[x/t], \forall x\ \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\ \alpha \Rightarrow \Delta}\ [\forall L]$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/c], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\ \alpha, \Delta}\ [\forall R]$
$\dfrac{\Gamma, \alpha[x/c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\ \alpha \Rightarrow \Delta}\ [\exists L]$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/t], \Delta, \exists x\ \alpha}{\Gamma \Rightarrow \exists x\ \alpha, \Delta}\ [\exists R]$

- La constante $c \notin FV(\Gamma, \Delta)$ es nueva (no aparece en el secuente) y se llama constante de Skolem.

Debe notarse que en dos de las reglas la fórmula cuantificada no desaparece del secuente, pues se puede volver a utilizarla constantemente.

La justificación es que si la sentencia $\forall x\ \alpha$ es parte de un conjunto satisfacible, añadir uno o más casos de α al conjunto no cambiará ese carácter.

Reglas y tácticas para cuantificadores

Las otras dos reglas, en las que si desaparece la fórmula al ser utilizada, tienen como restricción que el nombre c debe ser nuevo en cada rama en la que entra el caso.

Ello garantiza que el nombre está escogido en forma completamente arbitraria en el contexto, lo que concuerda con la semántica: se conoce que es verdad al menos en un caso, aunque no sepamos en cual.

Por ejemplo, el conjunto $\{\exists x\, P(x), \exists x \neg P(x)\}$ es satisfacible y, de no aplicar la regla con nombres distintos, se llegaría a tener en la misma rama $P(a), \neg P(a)$, lo que daría no satisfacible.

Ejercicios

- ¿A que fórmula corresponde el secuente?: $p, p \to q, q \vdash \neg q, \neg p \wedge r$

- Utilizando el cálculo de secuentes, encuentra una demostración de los siguientes secuentes:
  1. $p, p \to q, q \vdash \neg q, \neg p \wedge r$
  2. $\neg p \vee q \vdash p \to q$
  3. $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$
  4. $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$

Ejercicios

Utilizando cálculo de secuentes demuestra: $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \vdash \forall x P(x)$

Formalizar y comprobar con cálculo de secuentes. ¿Cuál de las conclusiones se puede extraer con absoluta certeza en función de estas dos proposiciones?

- Ningún político es matemático.
- Todas las personas aburridas son políticos.

1. Todos los políticos son matemáticos.
2. Los matemáticos no son personas aburridas.
3. Ningún político es una persona aburrida.
4. Algunas personas aburridas son matemáticos.