Tema 1. Lógica Proposicional: Formas normales

Lógica-GIA

Curso 2024–2025

Estandarización de fórmulas

Toda fórmula admite una estructura "estándar"

- Forma Normal Disyuntiva (FND)[1]
- Forma Normal Conjuntiva (FNC)[2]

[1]En inglés, disjunctive normal form (DNF)
[2]En inglés, conjuctive normal form (CNF)

Formas normales

Definición

Un literal es p (literal positivo) o $\neg p$ (literal negativo)

Dado un literal ℓ, su literal complementario ℓ^c se define como:

$$\ell^c = \begin{cases} p & \text{si } \ell = \neg p \\ \neg p & \text{si } \ell = p \end{cases}$$

Formas normales

Definición

Una fórmula está en forma normal disyuntiva (FND) cuando es una disyunción de conjunciones de literales.

Ejemplo:

$$(q \wedge \neg r) \bigvee (p \wedge r) \bigvee (p \wedge s \wedge \neg q)$$

Definición

Una fórmula está en forma normal conjuntiva (FNC) cuando es una conjunción de disyunciones de literales.

Ejemplo:

$$(p \vee \neg q) \bigwedge (\neg p \vee r) \bigwedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg r)$$

Formas normales

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en forma normal conjuntiva y a una fórmula en forma normal disyuntiva.

Pasos utilizando equivalencias:

1. Traducir $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$:

$$
\begin{aligned}
p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)
\end{aligned}
$$

2. Trasladar las negaciones hasta que aparezcan asociadas a literales (usando las leyes de De Morgan)
3. Eliminar dobles negaciones (usando $\neg\neg p \equiv p$)
4. Aplicar la distributividad de $\vee$ respecto de $\wedge$ (o viceversa) hasta obtener una fórmula en forma normal

Formas normales: cálculo mediante equivalencias

Ejemplo

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$	$\equiv$	$\neg(p \leftrightarrow q) \vee r$	*Implicación*
	$\equiv$	$\neg\ [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee r$	*Equivalencia*
	$\equiv$	$[\neg\ (\neg p \vee q) \vee \neg\ (\neg q \vee p)] \vee r$	*Morgan, Implic.*
	$\equiv$	$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r$	*Morgan*
	$\equiv$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$	*Doble negación*

Forma normal disyuntiva

Ejemplo

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$	$\equiv$	$[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \rightarrow r$	*Equivalencia*
	$\equiv$	$\neg[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee r$	*Implicación*
	$\equiv$	$[\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)] \vee r$	*Morgan*
	$\equiv$	$[(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q)] \vee r$	*Morgan*
	$\equiv$	$[(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee r$	*Doble negación*
	$\equiv$	$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$	*Distributiva*

Forma normal conjuntiva

Formas normales: cálculo mediante tablas semánticas

- Si $\{\ell_{1,1},\ldots,\ell_{1,n_1}\},\ldots,\{\ell_{m,1},\ldots,\ell_{m,n_m}\}$ son las ramas abiertas en una tabla semántica de una fórmula α, entonces:

$$(\ell_{1,1}\wedge\cdots\wedge\ell_{1,n_1})\ \vee\ \cdots\ \vee\ (\ell_{m,1}\wedge\cdots\wedge\ell_{m,n_m})$$

  es una forma normal disyuntiva de α.

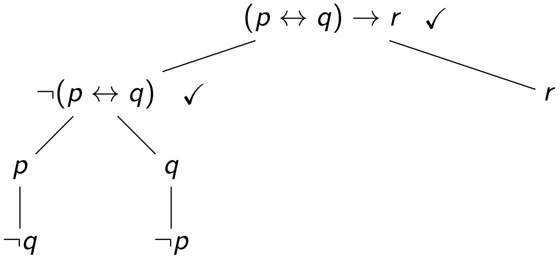
- Si $\{\ell_{1,1},\ldots,\ell_{1,n_1}\},\ldots,\{\ell_{m,1},\ldots,\ell_{m,n_m}\}$ son las ramas abiertas en una tabla semántica de $\neg\,\alpha$, entonces:

$$\left(\ell^c_{1,1}\vee\cdots\vee\ell^c_{1,n_1}\right)\ \wedge\ \cdots\ \wedge\ \left(\ell^c_{m,1}\vee\cdots\vee\ell^c_{m,n_m}\right)$$

  es una forma normal conjuntiva de α.

FND: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo inicial. $\alpha = (p \leftrightarrow q) \to r$



FND de α: $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$

FNC: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo inicial: $\alpha = (p \leftrightarrow q) \to r$

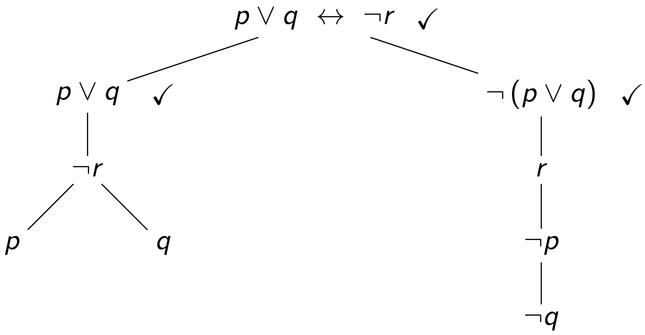
$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg\alpha \equiv (p \leftrightarrow q) \wedge \neg r \quad \checkmark & \\
 & | & \\
 & p \leftrightarrow q \quad \checkmark & \\
 & | & \\
 & \neg r & \\
 \diagup & & \diagdown \\
p & & \neg p \\
| & & | \\
q & & \neg q
\end{array}
$$

FND de $\neg\alpha$: $\neg\alpha \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

FNC de α: $\alpha \equiv \neg\neg\alpha \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

FND: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo. $\alpha = p \lor q \leftrightarrow \neg r$



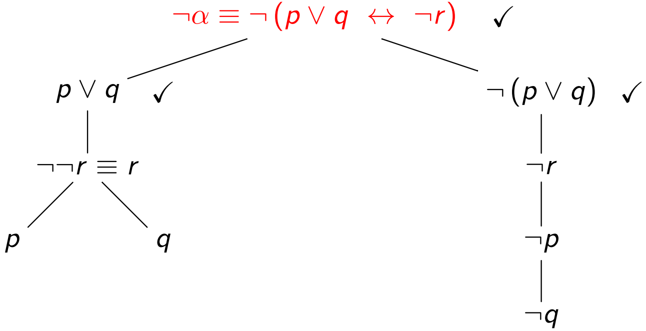
FND de α: $(p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r)$

Modelos: $\{p, q, \neg r\}$, $\{p, \neg q, \neg r\}$, $\{p, q, \neg r\}, \{\neg p, q, \neg r\}$, $\{\neg p, \neg q, r\}$

$$\boxed{M(\alpha) = \{\ \{p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{r\}\ \}}$$

FNC: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo. $\alpha = p \lor q \leftrightarrow \neg r$



FND de $\neg\alpha$: $\neg\alpha \equiv (p \land r) \lor (q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r)$

FNC de α: $\alpha \equiv (\neg p \lor \neg r) \land (\neg q \lor \neg r) \land (p \lor q \lor r)$

FNC: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo: $\alpha = p \vee q \to p \wedge q$

- $\neg\alpha \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ ✓
  - p
    - $\neg p$
      - $*$
    - $\neg q$
  - q
    - $\neg p$
    - $\neg q$
      - $*$

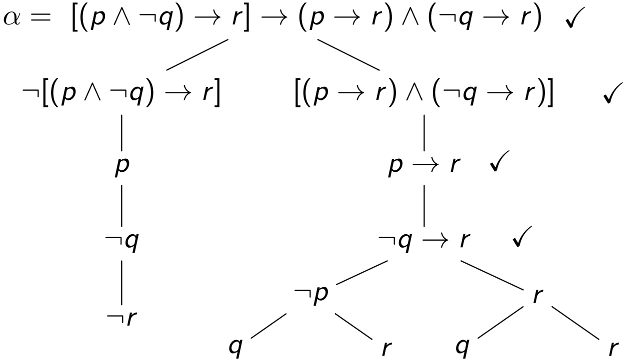
FND de $\neg\alpha$: $\neg\alpha \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

FNC de α: $\alpha \equiv \neg\neg\alpha \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$$\boxed{M(\neg\alpha) = \{\,\{p\},\ \{q\}\,\}, \qquad M(\alpha) = \{\,\{\ \},\ \{p, q\}\,\}}$$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND: un ejemplo

$$\alpha = [(p \land \neg q) \to r] \to (p \to r) \land (\neg q \to r)$$



Una FND de α: $(p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r) \lor r$

α es satisfacible: $\boxed{M(\alpha) = \{\, \{p\}, \{q\}, \{q, r\}, \{p, q, r\}, \{p, r\}, \{r\} \,\}}$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND: un ejemplo

Observación: Podría haberse simplificado si se tiene en cuenta que

$$(p \to r) \wedge (\neg q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (\neg p \wedge q) \vee r$$

La segunda rama quedaría

$$\begin{tikzcd} & {[(p \to r) \wedge (\neg q \to r)]} \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \neg p \arrow[d, no head] & & r \\ q & & \end{tikzcd}$$

Otra FND de α: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee r$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

Sea α una fórmula:

- Calculamos una FND de α: $\alpha \equiv F_1 \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$
- α es satisfacible si, y sólo si, alguna F_i lo es
- Cada F_i es una conjunción de literales, $F_i \equiv \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ldots \wedge \ell_m$
- $\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \cdots \wedge \ell_m$ es satisfacible si, y solo si, $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m\}$ no contiene ningún par de literales complementarios

Ejemplo

$$\alpha = \neg\left((p \vee \neg q) \to p\right) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$F_1 = p \wedge \neg p$ *es insatisfacible, pero*
$F_2 = \neg p \wedge \neg q$ *es satisfacible* $\big(I(p) = I(q) = 0$ *es un modelo de* $\alpha\big)$

Si, al construir la tabla semántica de α, todas las ramas se cierran, entonces α es insatisfacible o una contradicción.

Decisión de tautología mediante FNC

Sea α una fórmula:

- Calculamos una FNC de α: $\alpha \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$
- α es una tautología si, y sólo si, cada F_i es una tautología
- Cada F_i es una disyunción de literales, $F_i \equiv \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ldots \vee \ell_m$
- $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \cdots \vee \ell_m$ es una tautología si, y solo si, $\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m\}$ contiene algún par de literales complementarios (es decir, existen i, j tales que $\ell_i^c = \ell_j$)

Ejemplo

$$\alpha = (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg r \vee p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p)$$

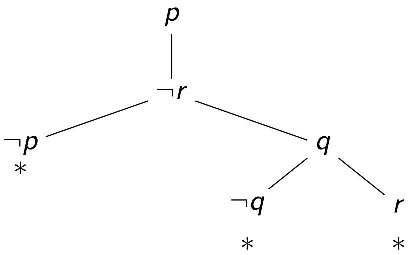
$F_1 = \neg p \vee \neg r \vee p$ *es una tautología, pero*
$F_2 = \neg p \vee q$ *no* $\big(I(p) = 1,\ I(q) = 0$ *es un contraejemplo de* $\alpha\big)$

Ejercicio

Halla una FNC de α y utilízala para demostrar que es una tautología

$$\alpha = [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

$$\neg\alpha \equiv [(p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge \neg(p \to r)$$



$$\alpha \equiv (\neg p \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$\equiv \top$$

NOTA: Todas las ramas de $\neg\alpha$ se cierran, entonces $\neg\alpha \equiv \bot$ y $\alpha \equiv \top$