Lógicas de Descripción

Pedro Cabalar

Lógica
Grado en Inteligencia Artificial
Universidade da Coruña

May 8, 2023

Lógica de Descripción

- Para expresar conocimiento de un dominio usamos muchos conceptos relacionados entre sí.
- P.ej. un pistón es una pieza mecánica y es parte del motor que es un mecanismo ...
- ☞ Representar definiciones de conceptos para un dominio dado = Conocimiento Terminológico
- Antiguamente se denominaban sistemas terminológicos o lenguajes de conceptos
- Hoy en día: descripción de Ontologías para la Web Semántica (OWL-DL, OWL-Lite).
- Lógica de Descripción (*Description Logic*, DL) usa operadores básicos (similar a lógica modal) que se pueden traducir a cálculo de predicados.

Lógica de Descripción

- Sintaxis: se forma a partir de
  1. Un conjunto de átomos llamados conceptos. Representan clases o conjuntos de objetos. Ej.: *Persona*, *Mamífero*, *Vehículo*, *Azul*, ...
  2. Un conjunto de roles que representan relaciones binarias entre objetos. Ej.: *le_gusta*, *posee*, *viaja_en*, *cría* ...
  3. Un conjunto de constructores que definen nuevos conceptos recursivamente. Ej.: vehículos rojos o azules = $\mathit{Vehículo} \sqcap (\mathit{Azul} \sqcup \mathit{Rojo})$.
     Ej.: un *Padre* es un $\mathit{Hombre} \sqcap \exists \mathit{cría}$
- Existe toda una clasificación o familia de Lógicas de Descripción distintas dependiendo de los constructores que permitimos usar

Lógica de Descripción: $\mathcal{FL}^{-}$

- La DL más sencilla es $\mathcal{FL}^{-}$. Sintaxis:

$$C \quad ::= \quad A \mid C \sqcap D \mid \forall R.C \mid \exists R \mid \top \mid \bot$$

  donde A=concepto atómico, C, D=conceptos y R=rol.

- Sintaxis alternativa:

$$C \quad ::= \quad A \mid (\texttt{:and}\ \ C\ D) \mid (\texttt{:all}\ \ R\ C) \mid (\texttt{:some}\ \ R)$$

- Cuantificadores: $\forall$*cría.Hembra* son los seres vivos cuyas crías son todas hembras, mientras que $\exists$*cría* son aquellos que tienen al menos una cría. Podemos escribir esto último como $\exists$*cría*.$\top$ too

Lógica de Descripción: $\mathcal{FL}^-$

Definición (Interpretación)

Una *interpretación* $\mathcal{I}$ *es un par* $\langle \Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I} \rangle$ *donde*

- $\Delta^\mathcal{I}$ *es un conjunto no vacío llamado* *dominio*
- $\cdot^\mathcal{I}$ *es una función que hace corresponder:*
  1. *Cada concepto con un subconjunto de* $\Delta^\mathcal{I}$.
  2. *Cada rol con un subconjunto de* $\Delta^\mathcal{I} \times \Delta^\mathcal{I}$.

Lógica de Descripción: $\mathcal{FL}^-$

- Ampliamos la función $\cdot^{\mathcal{I}}$ para evaluar conceptos no atómicos del siguiente modo:

$$
\begin{array}{rcl}
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} & = & C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(\exists R)^{\mathcal{I}} & = & \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \; : \; \exists y.(x,y) \in R^{\mathcal{I}}\} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} & = & \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \; : \; \forall y.(x,y) \in R^{\mathcal{I}} \Rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\top)^{\mathcal{I}} & = & \Delta^{\mathcal{I}} \\
(\bot)^{\mathcal{I}} & = & \emptyset
\end{array}
$$

- Ejemplos: ¿qué significan las siguientes expresiones?

$$
\begin{array}{l}
\mathit{Adulto} \sqcap \mathit{Macho} \\
\forall \mathit{cr\acute{\imath}a}.(\mathit{Adulto} \sqcap \mathit{Macho}) \\
\exists \mathit{cr\acute{\imath}a} \sqcap \forall \mathit{cr\acute{\imath}a}.(\exists \mathit{cr\acute{\imath}a} \sqcap \mathit{Adulto})
\end{array}
$$

Lógica de Descripción: $\mathcal{ALC}$

- Un segundo ejemplo: $\mathcal{ALC}$ es más expresiva que $\mathcal{FL}^-$. Permite:

$$C \quad ::= \quad A \mid C \sqcap D \mid \forall R.C \mid \exists R \mid \neg C$$

con $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$

- Una variante más limitada, $\mathcal{AL}$, reemplaza $\neg C$ por $\neg A$ (sólo se pueden negar conceptos atómicos).

Lógica de Descripcións: constructores más habituales

Constructor	Sintaxis	Semáántica
Aserción de Concepto	$o : C$	$o^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
Aserción de Rol	$(o_1, o_2) : R$	$(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$
Intersección	$C \sqcap D$	$C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
Unión	$C \sqcup D$	$C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
Negación	$\neg C$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
Existencial	$\exists R.C$	$\{x \ : \ \exists y.(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \& y \in C^{\mathcal{I}}\}$
Universal	$\forall R.C$	$\{x \ : \ \forall y.(x, y) \in R^{\mathcal{I}} \Rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$
Cardinalidad	$(\geq n\ R)$	$\{x \ : \ \lvert\{y.(x, y) \in R^{\mathcal{I}}\}\rvert \geq n\}$
	$(\leq n\ R)$	$\{x \ : \ \lvert\{y.(x, y) \in R^{\mathcal{I}}\}\rvert \leq n\}$
Inverso	R^{-}	$\{(x, y) \ : \ (y, x) \in R^{\mathcal{I}}\}$
Transitivo	R^{*}	$(R^{\mathcal{I}})^{*}$
Enumeración (uno-de)	$\{o_1, \ldots, o_n\}$	$\{o_1^{\mathcal{I}}, \ldots, o_n^{\mathcal{I}}\}$

...

Lógica de Descripcións: nomenclatura

- Para nombrar cada combinación se suelen usar las iniciales

  $\mathcal{F}$ propiedad funcional $(\leq 1\ R)$

  $\mathcal{E}$ existencial general $\exists R.C$

  $\mathcal{U}$ unión $C \sqcup D$

  $\mathcal{C}$ negación $\neg C$

  $\mathcal{S}$ = $\mathcal{ALC}$ con roles transitivos R^*

  $\mathcal{H}$ jerarquía de roles

  $\mathcal{R}$ roles reflexivos, irreflexivos u disjuntos

  $\mathcal{I}$ rol inverso R^-

  $\mathcal{O}$ enumeración (uno-de) $\{o_1, \ldots, o_n\}$

  $\mathcal{N}$ restricciones de cardinalidad $(\geq n\ R)$, $(\leq n\ R)$

  $\mathcal{Q}$ restricciones de cardinalidad cualificadas $(\geq n\ R.C)$, $(\leq n\ R.C)$

  $(\mathcal{D})$ tipos de datos (enteros, strings, etc)

- OWL-DL viene a ser $\mathcal{SHOIN}^{(\mathcal{D})}$ mientras que OWL-Lite está basado en $\mathcal{SHIF}^{(\mathcal{D})}$.

Lógica de Descripción

- Una Base de Conocimiento (terminológico) se compone de dos conjuntos de expresiones TBox y ABox.
- TBox: contiene las declaraciones terminológicas generales. Dos tipos:
  1. Una definición de concepto $A \equiv C$. Ejemplos:

$$\begin{aligned} Mujer &\equiv Persona \sqcap Hembra \\ Madre &\equiv Mujer \sqcap \exists cría \end{aligned}$$

     (se suele requerir definiciones no cíclicas)
  2. Un axioma de inclusión $C_1 \sqsubseteq C_2$. Ejemplo

$$\exists cría.Persona \sqsubseteq Persona$$

     Imponen restricciones en nuestro modelo

Lógica de Descripción

- ABox: contiene aserciones sobre elementos particulares del dominio o de relaciones entre ellos. Dos tipos:
  1. Aserción de concepto $o : C$. Ejemplo:

$$Moby\_Dick : Ballena$$
$$María : Hembra \sqcap \exists cría$$

  2. Aserciones de Rol $(o_1, o_2) : R$. Ejemplo:

$$(María, Jesús) : cría$$

Lógica de Descripción: razonamiento

- Problemas de razonamiento típicos para resolver. Dada una base de conocimiento:
  1. *Subsunción*. Comprobar si un concepto es más general que otro $C \sqsubseteq D$
  2. Equivalencia. Comprobar si dos conceptos son equivalentes $C \equiv D$
  3. Consistencia. Comprobar si un concepto tiene al menos algún modelo $C \equiv \bot$
  4. Pertenencia. Comprobar si un individuo es miembro de un concepto $o : C$
- Todos estos problemas se pueden reducir a consistencia. Ejemplo: $C \sqsubseteq D$ se puede reducir a comprobar la consistencia de $C \sqcap \neg D \equiv \bot$.

Lógica de Descripción: reasoning

- Existen métodos eficientes para resolver estos problemas de razonamiento
- Normalmente, variante de lenguaje más expresiva $\Rightarrow$ razonamiento asociado más complejo
- Ejemplo: subsunción $\mathcal{FL}^-$ es decidible en complejidad temporal P.
- Ver Description Logic Complexity Navigator `http://www.cs.man.ac.uk/~ezolin/dl/`

Lógica de Descripción: traducción a Lógica de Primer Órden

- La mayoría de las Lógicas de Descripción son reducibles a fragmentos decidibles de Lógica de Primer Órden
- Cada concepto C se convierte en un predicado unario $C(x)$ y cada rol R en un predicado binario $R(x, y)$.
- Podemos usar Lógica de Primer Órden con dos nombres de variable x, y:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
t_x(A) & = & A(x) & t_y(A) & = & A(y) \\
t_x(C \sqcap D) & = & t_x(C) \wedge t_x(D) & t_y(C \sqcap D) & = & t_y(C) \wedge t_y(D) \\
t_x(C \sqcup D) & = & t_x(C) \vee t_x(D) & t_y(C \sqcup D) & = & t_y(C) \vee t_y(D) \\
t_x(\exists R.C) & = & \exists y.R(x, y) \wedge t_y(C) & t_y(\exists R.C) & = & \exists x.R(y, x) \wedge t_x(C) \\
t_x(\forall R.C) & = & \forall y.R(x, y) \Rightarrow t_y(C) & t_y(\forall R.C) & = & \forall x.R(y, x) \Rightarrow t_x(C)
\end{array}
$$

- En una TBox, traducimos $C \equiv D$ como $\forall x.t_x(C) \leftrightarrow t_x(D)$.