

Tema 1. Lógica Proposicional: Formas normales

Lógica-GIA

Curso 2022–2023

Estandarización de fórmulas

Toda fórmula admite una estructura “estándar”

- Forma Normal Disyuntiva (FND)¹
- Forma Normal Conjuntiva (FNC)²

¹En inglés, disjunctive normal form (DNF)

²En inglés, conjunctive normal form (CNF)

Formas normales

Definición

Un *literal* es p (literal positivo) o $\neg p$ (literal negativo)

Dado un literal ℓ , su *literal complementario* ℓ^c se define como:

$$\ell^c = \begin{cases} p & \text{si } \ell = \neg p \\ \neg p & \text{si } \ell = p \end{cases}$$

Formas normales

Definición

Una fórmula está en *forma normal disyuntiva* (FND) cuando es una disyunción de conjunciones de literales.

Ejemplo:

$$(q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s \wedge \neg q)$$

Definición

Una fórmula está en *forma normal conjuntiva* (FNC) cuando es una conjunción de disyunciones de literales.

Ejemplo:

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg r)$$

Formas normales

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en forma normal conjuntiva y a una fórmula en forma normal disyuntiva.

Pasos utilizando equivalencias:

- 1 Traducir \rightarrow y \leftrightarrow :

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

- 2 Trasladar las negaciones hasta que aparezcan asociadas a literales (usando las leyes de De Morgan)
- 3 Eliminar dobles negaciones (usando $\neg\neg p \equiv p$)
- 4 Aplicar la distributividad de \vee respecto de \wedge (o viceversa) hasta obtener una fórmula en forma normal

Formas normales: cálculo mediante equivalencias

Ejemplo

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) \rightarrow r &\equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee r && \text{Implicación} \\ &\equiv \neg[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee r && \text{Equivalencia} \\ &\equiv [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)] \vee r && \text{Morgan, Implic.} \\ &\equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r && \text{Morgan} \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r && \text{Doble negación}\end{aligned}$$

Forma normal disyuntiva

Ejemplo

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) \rightarrow r &\equiv [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \rightarrow r && \text{Equivalencia} \\ &\equiv \neg[(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee r && \text{Implicación} \\ &\equiv [\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)] \vee r && \text{Morgan} \\ &\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q)] \vee r && \text{Morgan} \\ &\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee r && \text{Doble negación} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) && \text{Distributiva}\end{aligned}$$

Forma normal conjuntiva

Formas normales: cálculo mediante tablas semánticas

- Si $\{\ell_{1,1}, \dots, \ell_{1,n_1}\}, \dots, \{\ell_{m,1}, \dots, \ell_{m,n_m}\}$ son las ramas abiertas en una tabla semántica de una fórmula α , entonces:

$$(\ell_{1,1} \wedge \dots \wedge \ell_{1,n_1}) \vee \dots \vee (\ell_{m,1} \wedge \dots \wedge \ell_{m,n_m})$$

es una forma normal disyuntiva de α .

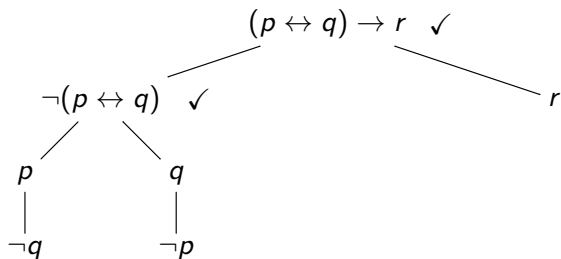
- Si $\{\ell_{1,1}, \dots, \ell_{1,n_1}\}, \dots, \{\ell_{m,1}, \dots, \ell_{m,n_m}\}$ son las ramas abiertas en una tabla semántica de $\neg \alpha$, entonces:

$$(\ell_{1,1}^c \vee \dots \vee \ell_{1,n_1}^c) \wedge \dots \wedge (\ell_{m,1}^c \vee \dots \vee \ell_{m,n_m}^c)$$

es una forma normal conjuntiva de α .

FND: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo inicial. $\alpha = (p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

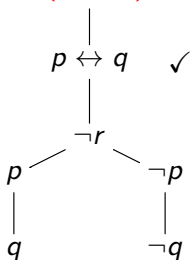


FND de α : $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$

FNC: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo inicial: $\alpha = (p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

$$\neg\alpha \equiv (p \leftrightarrow q) \wedge \neg r \quad \checkmark$$

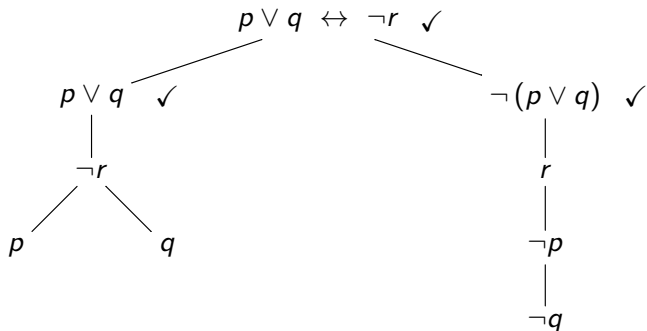


FND de $\neg\alpha$: $\neg\alpha \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

FNC de α : $\alpha \equiv \neg\neg\alpha \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

FND: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo. $\alpha = p \vee q \leftrightarrow \neg r$



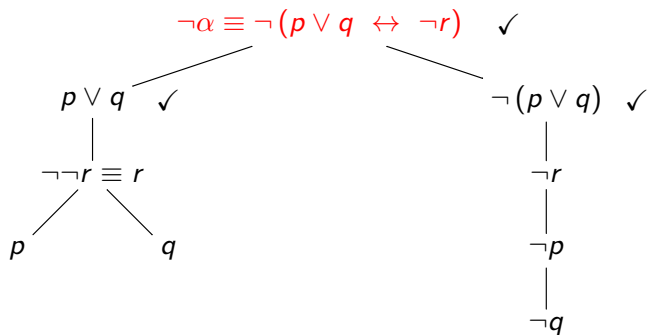
FND de α : $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

Modelos: $\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{p, q, \neg r\}, \{\neg p, q, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, r\}$

$$M(\alpha) = \{ \{p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{r\} \}$$

FNC: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo. $\alpha = p \vee q \leftrightarrow \neg r$

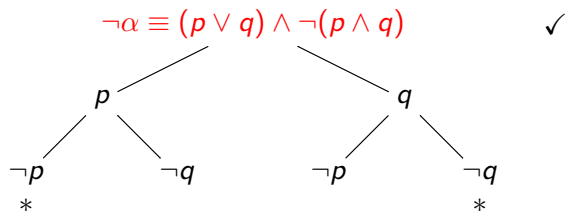


FND de $\neg \alpha$: $\neg \alpha \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

FNC de α : $\alpha \equiv (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$

FNC: cálculo mediante tablas semánticas

Ejemplo: $\alpha = p \vee q \rightarrow p \wedge q$



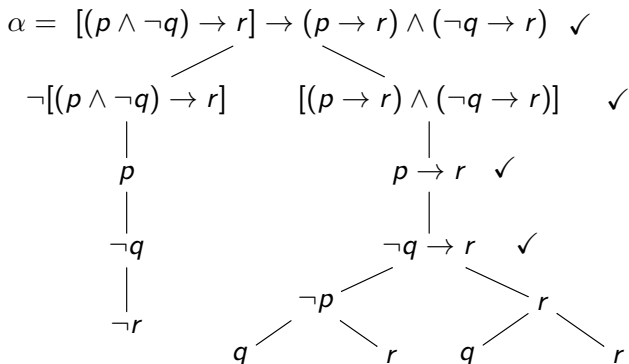
FND de $\neg\alpha$: $\neg\alpha \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

FNC de α : $\alpha \equiv \neg\neg\alpha \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

$$M(\neg\alpha) = \{ \{p\}, \{q\} \}, \quad M(\alpha) = \{ \{ \}, \{p, q\} \}$$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND: un ejemplo

$$\alpha = [(p \wedge \neg q) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$$



Una FND de α : $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee r$

α es **satisfacible**:

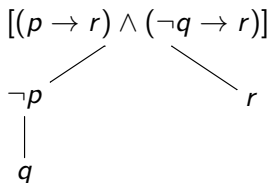
$$M(\alpha) = \{ \{p\}, \{q\}, \{q, r\}, \{p, q, r\}, \{p, r\}, \{r\} \}$$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND: un ejemplo

Observación: Podría haberse simplificado si se tiene en cuenta que

$$(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv (\neg p \wedge q) \vee r$$

La segunda rama quedaría



Otra FND de α : $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q) \vee r$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

Sea α una fórmula:

- Calculamos una FND de α : $\alpha \equiv F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$
- α es **satisfacible** si, y sólo si, **alguna F_i lo es**
- Cada F_i es una conjunción de literales, $F_i \equiv l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m$
- $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_m$ es **satisfacible** si, y solo si, $\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ **no** contiene ningún par de literales complementarios

Ejemplo

$$\alpha = \neg((p \vee \neg q) \rightarrow p) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$F_1 = p \wedge \neg p$ es *insatisfacible*, pero

$F_2 = \neg p \wedge \neg q$ es *satisfacible* ($I(p) = I(q) = 0$ es un *modelo* de α)

Si, al construir la tabla semántica de α , **todas las ramas se cierran**, entonces α es **insatisfacible** o una contradicción.

Decisión de tautología mediante FNC

Sea α una fórmula:

- Calculamos una FNC de α : $\alpha \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$
- α es una **tautología** si, y sólo si, **cada F_i es una tautología**
- Cada F_i es una disyunción de literales, $F_i \equiv \ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_m$
- $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \dots \vee \ell_m$ es una **tautología** si, y solo si, $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m\}$ contiene algún par de literales complementarios (es decir, existen i, j tales que $\ell_i^c = \ell_j$)

Ejemplo

$$\alpha = (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg r \vee p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p)$$

$F_1 = \neg p \vee \neg r \vee p$ es una tautología, pero

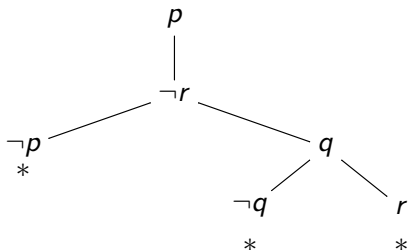
$F_2 = \neg p \vee q$ no ($I(p) = 1, I(q) = 0$ es un **contraejemplo** de α)

Ejercicio

Halla una FNC de α y utilízala para demostrar que es una tautología

$$\alpha = [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$\neg\alpha \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \wedge \neg(p \rightarrow r)$$



$$\begin{aligned}\alpha &\equiv (\neg p \vee r \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg q \vee \neg r) \\ &\equiv \top\end{aligned}$$

NOTA: Todas las **ramas** de $\neg\alpha$ **se cierran**, entonces $\neg\alpha \equiv \perp$ y $\alpha \equiv \top$

Ejercicios

- 1 Para la fórmula $(p \rightarrow r \vee s) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(p \rightarrow r)$, halla una FND, una FNC, decide si es o no satisfacible y determina, en su caso, todos sus modelos.
- 2 Para $\alpha = p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee r$
 - Halla una tabla semántica para α y otra para $\neg\alpha$
 - Halla una FND y una FNC de α
 - Determina los modelos y contramodelos de α
- 3 Sea $\alpha = (r \rightarrow t) \wedge (t \vee p \rightarrow \neg q) \wedge (q \vee p) \wedge (p \rightarrow r)$, utiliza un árbol semántico para:
 - probar que α es una contingencia,
 - hallar una forma normal disyuntiva de α ,
 - probar que el argumento siguiente es válido

$$\{(r \rightarrow t), (t \vee p \rightarrow \neg q), (q \vee p), (p \rightarrow r)\} \models r \rightarrow p$$