

Tema 1: Cálculo de secuentes

Lógica

Curso 2022–2023

Secuentes en Lógica

El cálculo secuentes es un sistema formal (conjunto de reglas) con el que se puede derivar la validez de una fórmula mediante la manipulación de fórmulas puramente simbólicas.

En lugar de manejar fórmulas, transformamos expresiones como $\Gamma \vdash \Delta$ que se convierten en objetos del metalenguaje.

Estas reglas se utilizan para demostrar la verdad de las declaraciones tanto en lógica proposicional como en lógica de primer orden.

Este sistema, junto con deducción natural, fue creado y diseñado en 1930's por Gerhard Gentzen: matemático alemán (1909 - 1945).

Secuentes en Lógica

Fue diseñado para buscar un estilo de prueba que permita implementación directa. De hecho, los sistemas implementados de prueba automática (PVS, Coq, ...) utilizan sistema de secuentes.

En líneas generales se basa en considerar un objetivo inicial acorde con el problema que se quiere resolver, y descomponerlo en subobjetivos cada vez más simples hasta llegar a situaciones cuya solución sea trivial.

$$\frac{\textit{Secuentes subobjetivos}}{\textit{Secuente objetivo}} \quad [\textit{Regla}]$$

Noción de secuencia

Un secuencia es un par de la forma $\Gamma \vdash \Delta$ donde Γ y Δ son multiconjuntos finitos de fórmulas. La parte izquierda Γ se llama antecedente; la parte derecha Δ se llama consecuente.

El secuencia expresa que Δ se deduce de Γ

Ejemplos de secuencias:

- $\vdash A, A$
- $A \vdash$
- $A \vdash C$
- $A \vdash A$
- $A, A, A, B \vdash B, C$

Fórmula asociada a un secuento

La fórmula asociada al secuento $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_k$ es:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$$

Intuitivamente: Si todas las fórmulas del antecedente son ciertas, entonces alguna del consecuente también lo es.

Semántica de un secuyente

Un secuyente $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_k$ es válido si, y sólo si, $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee B_2, \vee \dots \vee B_k$ es una fórmula válida.

Notación del cálculo de secuentes

- Sintaxis: $\Gamma \vdash \Delta$, con Γ y Δ conjuntos de fórmulas.

Notación del cálculo de secuentes

- Sintaxis: $\Gamma \vdash \Delta$, con Γ y Δ conjuntos de fórmulas.
- Semántica de $\Gamma \rightarrow \Delta$: $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$

Notación del cálculo de secuentes

- Sintaxis: $\Gamma \vdash \Delta$, con Γ y Δ conjuntos de fórmulas.
- Semántica de $\Gamma \rightarrow \Delta$: $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$
- Antecedente de $\Gamma \vdash \Delta$: Γ

Notación del cálculo de secuentes

- Sintaxis: $\Gamma \vdash \Delta$, con Γ y Δ conjuntos de fórmulas.
- Semántica de $\Gamma \rightarrow \Delta$: $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$
- Antecedente de $\Gamma \vdash \Delta$: Γ
- Consecuente de $\Gamma \vdash \Delta$: Δ

Representación de reglas de secuentes

El cálculo de secuentes está diseñado para realizar **pruebas hacia atrás**. En tal estilo, una conjetura dada se **descompone** en subobjetivos, emparejando la conclusión de alguna de las reglas de inferencia con la conjetura.

Los subobjetivos a su vez pueden ser reducido a otros subobjetivos, y así sucesivamente, hasta alcanzar el esquema de axioma.

$$\frac{\textit{Secuentes subobjetivos}}{\textit{Secuente objetivo}} \quad [\textit{Regla}]$$

Regla de corte

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \alpha, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad (\text{cut})$$

Regla del axioma

Un axioma es un seciente en el que aparece una misma fórmula en el antecedente y en el consecuente

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha, \Delta} \text{ [Ax]}$$

Intuitivamente: Cualquier seciente en el que una misma fórmula α aparezca tanto en el antecedente como en el consecuente es cierto y no genera ningún subobjetivo.

Antecedente falso.

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \text{ [L}\perp\text{]}$$

Reglas de cálculo

- El resto de las reglas del cálculo de secuentes indican cómo descomponer una fórmula del seciente objetivo (parte inferior de la regla) obteniendo un conjunto de secuentes subobjetivos (parte superior de la regla).
- Las reglas se clasifican según el tipo de fórmula en cuestión y si ésta se encuentra en el antecedente o en el consecuente del objetivo.

Reglas estructurales

Debilitamiento, contracción y permutación.

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} \text{ [WL]}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} \text{ [WR]}$
$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta} \text{ [CL]}$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta} \text{ [CR]}$
$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \beta, \alpha \vdash \Delta} \text{ [PL]}$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \beta, \alpha, \Delta} \text{ [PR]}$

Reglas de la negación

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta} [\neg L]$	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Delta} [\neg R]$

Reglas de la disyunción

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta} \quad [\vee L]$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta} \quad [\vee R]$

Regla de la conjunción

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta} [\wedge L]$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta} [\wedge R]$

Regla de la implicación

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \Delta} [\rightarrow L]$	$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Delta} [\rightarrow R]$

Regla de la equivalencia

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma, \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash \Delta} \quad [\leftrightarrow \text{L}]$	$\frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \Delta} \quad [\leftrightarrow \text{R}]$

Proceso de prueba

Para demostrar la validez de una fórmula **F** mediante el cálculo de secuentes:

- Considerar **F** como seciente objetivo inicial.
- Se van aplicando las reglas dando lugar a nuevos subobjetivos.
- El proceso se repite hasta que todos los subobjetivos han sido eliminados mediante la Regla del Axioma. En ese caso, la fórmula **F** es válida.
- Si se alcanza un subobjetivo al que no puede aplicarse ninguna regla, entonces **F** no es válida

Secuentes versus tablas semánticas

- Se dice que una prueba es **analítica** si no hace uso de la regla de corte.
- Cualquier prueba analítica en cálculo de secuentes tiene un método **dual de tableaux**.
- **Idea**: invertir la prueba de secuentes de abajo a arriba. Puede ser vista como una tabla semántica.
- Dado $\Gamma \vdash \Delta$ pensamos su prueba **reducción al absurdo**. Se define un **conjunto asociado** $\Gamma \cup \neg\Delta$, i.e., $\Gamma \cup \{\neg\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$.
- Diferentes sentencias pueden tener el mismo conjunto asociado: tanto $\neg A \vdash B$ como $\vdash A, B$ tienen como conjunto asociado $\{\neg A, \neg B\}$.
- Para obtener la tabla semántica, en la prueba de secuentes, se sustituyen las sentencias por conjuntos asociados e invertimos el diagrama.

Secuentes versus tablas semánticas

- Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}}{\neg A \wedge \neg B, A \vdash} \quad \frac{\frac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash}}{\neg A \wedge \neg B, B \vdash}}{A \vee B, \neg A \wedge \neg B \vdash}}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}$$

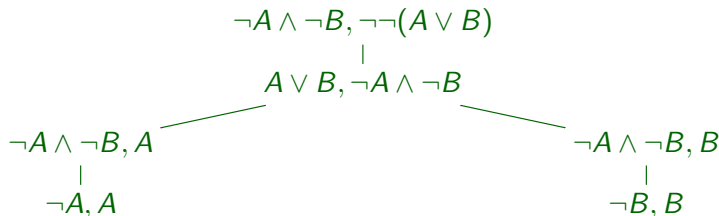
¿se convierte en? ...

Secuentes versus tablas semánticas

- Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}}{\neg A \wedge \neg B, A \vdash} \quad \frac{\frac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash}}{\neg A \wedge \neg B, B \vdash}}{A \vee B, \neg A \wedge \neg B \vdash} \quad \frac{}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}}$$

¿se convierte en? ...



Secuentes versus tablas semánticas

- Existen sistemas de tablas semánticas **no analíticos**, homólogos a los del cálculos de secuentes no analíticos.
- No satisfacen la propiedad de subfórmula, es decir, no es necesario que cada nodo de la tabla semántica sea una subfórmula de la raíz.

El cálculo de secuentes proposicional

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta} [\neg I]$	$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [\neg D]$
$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} [\vee I]$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [\vee D]$
$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} [\wedge I]$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [\wedge D]$
$\frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \quad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} [\rightarrow I]$	$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [\rightarrow D]$
$\frac{\Gamma, A \rightarrow B, B \rightarrow A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \leftrightarrow B \Rightarrow \Delta} [\leftrightarrow I]$	$\frac{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B \rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \leftrightarrow B, \Delta} [\leftrightarrow D]$

$$\frac{\Gamma \Longrightarrow A, \Delta \quad \Gamma, A, \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta} [\text{Corte}]$$

Secuentes en Lógica de primer orden

Aunque en la lógica de primer orden, las tablas semánticas (o cualquier otro método) no proporcionan algoritmos generales para determinar propiedades lógicas, la extensión al cálculo de predicados del método de secuentes permite resolver algunas cuestiones.

A las reglas para el cálculo de proposiciones, es preciso añadir cuatro más, para los cuantificadores.

Al contrario que en el cálculo proposicional, donde no importa el orden de aplicación de las reglas en el cálculo de predicados es más complicado. Podría perderse la ocasión de cerrar una deducción si no se emplean juiciosamente las reglas.

Reglas y tácticas para cuantificadores

Izquierda	Derecha
$\frac{\Gamma, \alpha[x/t], \forall x \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \alpha \Rightarrow \Delta} \quad [\forall L]$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/c], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x \alpha, \Delta} \quad [\forall R]$
$\frac{\Gamma, \alpha[x/c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \alpha \Rightarrow \Delta} \quad [\exists L]$	$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha[x/t], \Delta, \exists x \alpha}{\Gamma \Rightarrow \exists x \alpha, \Delta} \quad [\exists R]$

- La constante $c \notin FV(\Gamma, \Delta)$ es nueva (no aparece en el seciente) y se llama constante de Skolem.

Debe notarse que en dos de las reglas la fórmula cuantificada no desaparece del seciente, pues se puede volver a utilizarla constantemente.

La justificación es que si la sentencia $\forall x \alpha$ es parte de un conjunto satisfacible, añadir uno o más casos de α al conjunto no cambiará ese carácter.

Reglas y tácticas para cuantificadores

Las otras dos reglas, en las que si desaparece la fórmula al ser utilizada, tienen como restricción que el nombre t debe ser nuevo en cada rama en la que entra el caso.

Ello garantiza que el nombre está escogido en forma completamente arbitraria en el contexto, lo que concuerda con la semántica: se conoce que es verdad al menos en un caso, aunque no sepamos en cual.

Por ejemplo, el conjunto $\{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$ es satisfacible y, de no aplicar la regla con nombres distintos, se llegaría a tener en la misma rama $P(a), \neg P(a)$, lo que daría no satisfacible.