

Tema 1: Minimización

Lógica - Grado en Inteligencia Artificial (UDC)

Curso 2022–2023

F. Aguado, P. Cabalar, G. Pérez, C. Vidal

Minimización

- Dado un conjunto de modelos S ,
¿podemos hallar una fórmula α tal que $M(\alpha) = S$?
- Comenzando con los modelos de $M(\alpha)$, se obtiene una FND de α .
- A partir de los contramodelos de α , se obtiene una FNC de α .
- **Objetivo:** encontrar una fórmula de tamaño minimal.
- **Métodos:** de Karnaugh y de Quine-McCluskey.

Implicantes

Definición

Un conjunto de literales C es un *implicante* de α si su conjunción implica α .
 C es un *implicante primo* de α si no existe D , implicante de α , con $D \subset C$.

Implicantes

Definición

Un conjunto de literales C es un *implicante* de α si su conjunción implica α .
 C es un *implicante primo* de α si no existe D , implicante de α , con $D \subset C$.

- Para *minimizar*: Obtendremos un conjunto de implicantes primos de una fórmula a partir de su conjunto de modelos.
- Suponemos un orden arbitrario (por ejemplo, alfabético) entre los átomos de la signatura. Por ejemplo: $[p, q, r, s]$.
- Representamos cada modelo como una cadena de bits siguiendo esa ordenación. Así, **1010** indica que p y r son verdaderos y el resto falsos.
- Podemos representar **1010** como una conjunción de literales $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$ (llamado *mintérmino*) o utilizando su representación decimal **m10**.

FND de una fórmula a partir de sus modelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

FND de una fórmula a partir de sus modelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

FND de una fórmula a partir de sus modelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

minterm	p	q	r	α	
m0	0	0	0	0	
m1	0	0	1	1	$\longrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge r$
m2	0	1	0	1	$\longrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$
m3	0	1	1	1	$\longrightarrow \neg p \wedge q \wedge r$
m4	1	0	0	0	
m5	1	0	1	0	
m6	1	1	0	1	$\longrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$
m7	1	1	1	0	

FND de una fórmula a partir de sus modelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

minterm	p	q	r	α	
m0	0	0	0	0	
m1	0	0	1	1	$\longrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge r$
m2	0	1	0	1	$\longrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$
m3	0	1	1	1	$\longrightarrow \neg p \wedge q \wedge r$
m4	1	0	0	0	
m5	1	0	1	0	
m6	1	1	0	1	$\longrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$
m7	1	1	1	0	

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

FNC de una fórmula a partir de sus contramodelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

FNC de una fórmula a partir de sus contramodelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

minterm	p	q	r	α	
m0	0	0	0	0	→ $p \vee q \vee r$
m1	0	0	1	1	
m2	0	1	0	1	
m3	0	1	1	1	
m4	1	0	0	0	→ $\neg p \vee q \vee r$
m5	1	0	1	0	→ $\neg p \vee q \vee \neg r$
m6	1	1	0	1	
m7	1	1	1	0	→ $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

FNC de una fórmula a partir de sus contramodelos

Ejemplo

$$M(\alpha) = \{ \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{q, r\} \}$$

minterm	p	q	r	α	
m0	0	0	0	0	→ $p \vee q \vee r$
m1	0	0	1	1	
m2	0	1	0	1	
m3	0	1	1	1	
m4	1	0	0	0	→ $\neg p \vee q \vee r$
m5	1	0	1	0	→ $\neg p \vee q \vee \neg r$
m6	1	1	0	1	
m7	1	1	1	0	→ $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

$$\alpha = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

Minimización: Diagrama de Karnaugh

- Un **Diagrama de Karnaugh** de una función booleana es una representación gráfica de la tabla de valores de la función.
- Un mapa de Karnaugh es similar a una tabla de verdad, ya que muestra todos los posibles valores de la salida para cada combinación posible de las entradas.
- En lugar de organizarse en filas y columnas, un mapa de Karnaugh es un **conjunto de celdas** en el que cada celda representa un valor binario de las entradas.
- El número de celdas de un mapa de Karnaugh es igual al número total de posibles combinaciones de los valores de las variables de entrada, es decir, 2^n siendo n el número de variables de la función.

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo con dos átomos

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

	p	q	α
$\neg p \wedge \neg q \longrightarrow$	0	0	1
$\neg p \wedge q \longrightarrow$	0	1	1
	1	0	0
$p \wedge q \longrightarrow$	1	1	1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo con dos átomos

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

	p	q	α
$\neg p \wedge \neg q \longrightarrow$	0	0	1
$\neg p \wedge q \longrightarrow$	0	1	1
	1	0	0
$p \wedge q \longrightarrow$	1	1	1

$p \backslash q$	0	1
0		
1		

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo con dos átomos

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

	p	q	α
$\neg p \wedge \neg q \longrightarrow$	0	0	1
$\neg p \wedge q \longrightarrow$	0	1	1
	1	0	0
$p \wedge q \longrightarrow$	1	1	1

$p \backslash q$	0	1
0	1	
1		

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo con dos átomos

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

	p	q	α
$\neg p \wedge \neg q$	0	0	1
$\neg p \wedge q$	0	1	1
	1	0	0
$p \wedge q$	1	1	1

$p \backslash q$	0	1
0	1	1
1		

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo con dos átomos

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

	p	q	α		$p \backslash q$	0	1
$\neg p \wedge \neg q \rightarrow$	0	0	1		0	1	1
$\neg p \wedge q \rightarrow$	0	1	1				
	1	0	0				
$p \wedge q \rightarrow$	1	1	1		1		1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo con dos átomos

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

	p	q	α		$p \backslash q$	0	1
$\neg p \wedge \neg q \rightarrow$	0	0	1		0	1	1
$\neg p \wedge q \rightarrow$	0	1	1		1	0	1
	1	0	0		1	0	1
$p \wedge q \rightarrow$	1	1	1				

Minimización: Diagrama de Karnaugh

- Las celdas se distribuyen de manera que simplificar una determinada expresión consiste en **agrupar adecuadamente** algunas de las celdas.
- Las celdas de un mapa de Karnaugh se disponen de manera que **entre dos celdas adyacentes sólo cambie el valor de una única variable**.
- Físicamente, cada celda es adyacente a las que están situadas inmediatamente junto a cualquiera de sus cuatro lados. Pero no es adyacente a aquellas que tocan diagonalmente alguna de sus esquinas.
- Además existe **adyacencia cíclica**:

Las celdas de la fila inferior son adyacentes a las de la fila superior

Las celdas de la columna izquierda son adyacentes a las de la derecha

Minimización: Diagrama de Karnaugh

- Dos celdas son **adyacentes** si **difieren exactamente en un literal**.

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

$\begin{array}{c} p \\ \backslash \\ q \end{array}$	0	1
0	1	1
1	0	1

Son adyacentes:
cadenas 00, 01

Son adyacentes:
cadenas 01, 11

Minimización: Diagrama de Karnaugh

- La **minimización** comienza **agrupando** los **1** que estén situados en celdas adyacentes del mapa.
 - Un grupo debe contener el **mayor** número posible de celdas
 - ◇ toda celda del grupo debe ser adyacente a otra celda del grupo
 - ◇ el número de celdas de cada grupo debe ser potencia de **2**
 - ◇ ese bloque se llama **implicante primo**
 - Cada **1** del diagrama debe estar incluido en al menos un grupo, aunque un **1** puede estar incluido en varios grupos solapados
- Puede haber varias agrupaciones válidas posibles, pero siempre eligiendo los bloques de **mayor tamaño posible** para minimizar el número de grupos, y siempre se debe elegir un bloque si es el único bloque de unos que cubre a un **1** en el diagrama. Este bloque se llama **implicante primo esencial**.

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo anterior: $\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

$p \backslash q$	0	1
0	1	1
1	0	1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

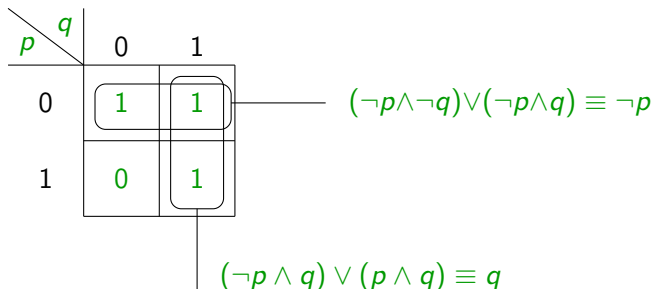
Ejemplo anterior: $\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

$p \backslash q$	0	1
0	1	1
1	0	1

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$

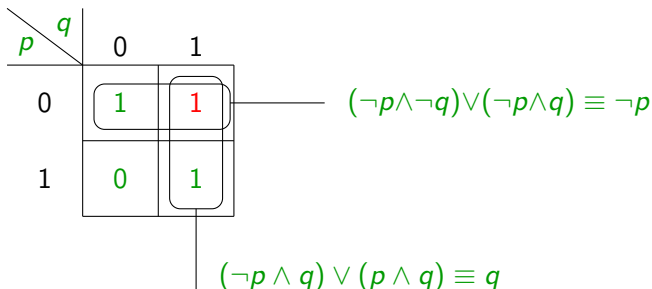
Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo anterior: $\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$



Minimización: Diagrama de Karnaugh

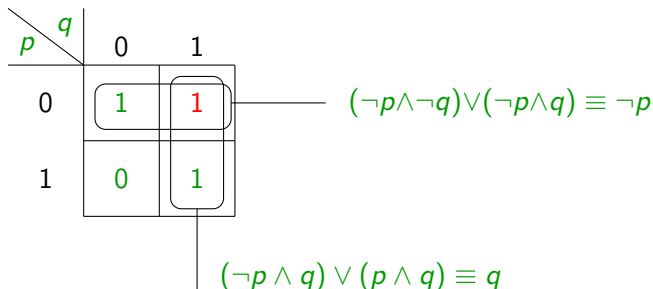
Ejemplo anterior: $\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$



$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo anterior: $\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$



$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv \overbrace{(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}^{\neg p} \vee \underbrace{(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)}_q \equiv \neg p \vee q$$

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

$\begin{matrix} q r \\ p \end{matrix}$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	0	0	1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

		$\neg p \wedge r$			
$p \backslash q r$		00	01	11	10
	0	0	1	1	1
	1	0	0	0	1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

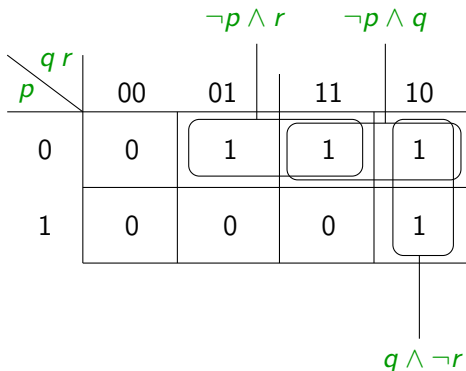
		$\neg p \wedge r$		$\neg p \wedge q$	
$q \backslash p$	r	00	01	11	10
0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0



Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m0	0	0	0	0
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m4	1	0	0	0
m5	1	0	1	0
m6	1	1	0	1
m7	1	1	1	0

		$\neg p \wedge r$		$\neg p \wedge q$	
$q \backslash p$	r	00	01	11	10
0		0	1	1	1
1		0	0	0	1

$q \wedge \neg r$

$$\alpha \equiv (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$$

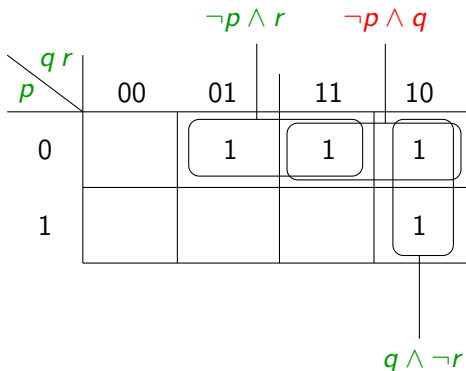
$(\neg p \wedge q)$ es un implicante primo **no esencial**

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

minterm	p	q	r	α
m1	0	0	1	1
m2	0	1	0	1
m3	0	1	1	1
m6	1	1	0	1



$$\alpha \equiv (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \equiv (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$$

Minimización: método de Quine-McCluskey

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- Comenzamos con la tabla de los modelos de α .
- En cada paso, emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	
m1	001	
m2	010	
m3	011	
m6	110	

Minimización: método de Quine-McCluskey

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- Comenzamos con la tabla de los modelos de α .
- En cada paso, emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string
m1	001	m(1,3)	0 – 1
m2	010		
m3	011		
m6	110		

Minimización: método de Quine-McCluskey

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- Comenzamos con la tabla de los modelos de α .
- En cada paso, emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string
m1	001	m(1,3)	0 – 1
m2	010	m(2,3)	0 1 –
m3	011		
m6	110		

Minimización: método de Quine-McCluskey

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- Comenzamos con la tabla de los modelos de α .
- En cada paso, emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string
m1	001	m(1,3)	0 – 1
m2	010	m(2,3)	0 1 –
m3	011	m(2,6)	– 1 0
m6	110		

Minimización: método de Quine-McCluskey

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- Comenzamos con la tabla de los modelos de α .
- En cada paso, emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m1	001	m(1,3)	0 – 1		
m2	010	m(2,3)	0 1 –		
m3	011	m(2,6)	– 1 0		
m6	110				

- En el siguiente paso, emparejamos cadenas en la nueva columna.

Minimización: método de Quine-McCluskey

$$\alpha = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

- Comenzamos con la tabla de los modelos de α .
- En cada paso, emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m1	001	m(1,3)	0 – 1 *		
m2	010	m(2,3)	0 1 – *		
m3	011	m(2,6)	– 1 0 *		
m6	110				

- En el siguiente paso, emparejamos cadenas en la nueva columna. Si una cadena no se empareja, se marca con *.

Minimización: método de Quine-McCluskey

- Los implicantes marcados con * son **implicantes primos**.
- En el ejemplo: $m(1, 3)$, $m(2, 3)$, $m(2, 6)$.
- Aunque no todos son esenciales.

Minimización: método de Quine-McCluskey

- Los implicantes marcados con * son **implicantes primos**.
- En el ejemplo: $m(1,3)$, $m(2,3)$, $m(2,6)$.
- Aunque no todos son esenciales.
- Construimos una tabla:

	1	2	3	6
$m(1,3)$	×		×	
$m(2,3)$		×	×	
$m(2,6)$		×		×

- Las columnas con una sola × indican implicantes **esenciales**

Minimización: método de Quine-McCluskey

- Los implicantes marcados con * son **implicantes primos**.
- En el ejemplo: $m(1,3)$, $m(2,3)$, $m(2,6)$.
- Aunque no todos son esenciales.
- Construimos una tabla:

	1	2	3	6
$m(1,3)$	×		×	
$m(2,3)$		×	×	
$m(2,6)$		×		×

- Las columnas con una sola × indican implicantes **esenciales**
- Con los dos implicantes esenciales, $m(1,3)$ y $m(2,6)$ se cubren **todos los modelos** de α :

$$\alpha \equiv \underbrace{(\neg p \wedge r)}_{m(1,3)} \vee \underbrace{(q \wedge \neg r)}_{m(2,6)}$$

Nota: Las secuencias que corresponden a esos implicantes son:

$$m(1,3) \mapsto 0 - 1 \text{ y } m(2,6) : \mapsto - 1 0$$

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

Tabla de modelos de α

minterm	string
m4	0100
m8	1000
m9	1001
m10	1010
m11	1011
m12	1100
m14	1110
m15	1111

Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo

Tabla de modelos de α

minterm	string
m4	0100
m8	1000
m9	1001
m10	1010
m11	1011
m12	1100
m14	1110
m15	1111

$\begin{matrix} r & s \\ p & q \end{matrix}$	00	01	11	10
00				
01	1			
11	1		1	1
10	1	1	1	1

Minimización: Diagrama de Karnaugh

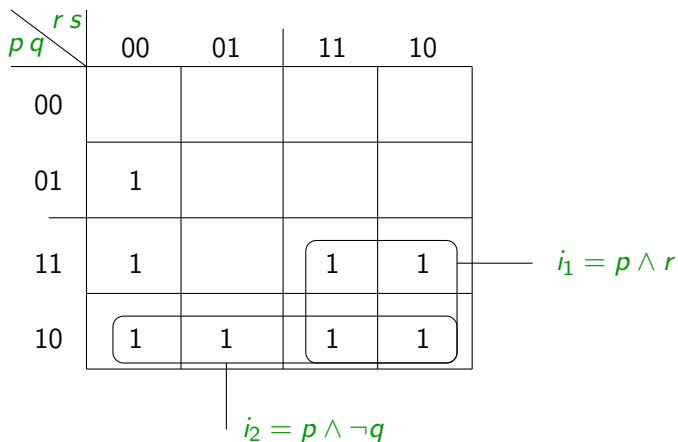
Ejemplo

$\begin{matrix} r s \\ p q \end{matrix}$	00	01	11	10
00				
01	1			
11	1		1	1
10	1	1	1	1

$i_1 = p \wedge r$

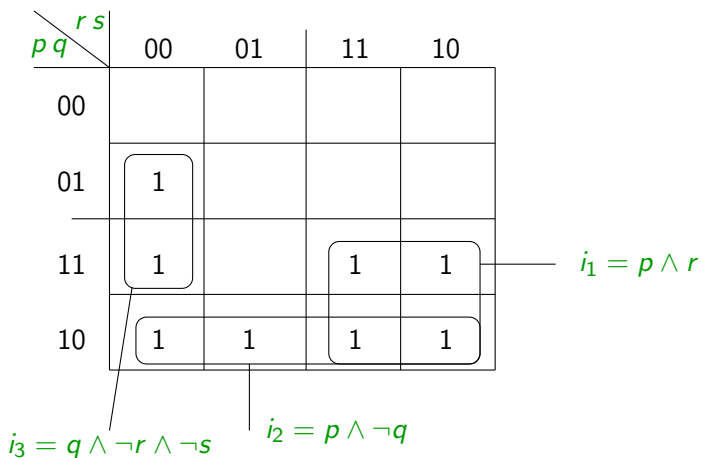
Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo



Minimización: Diagrama de Karnaugh

Ejemplo



$$\alpha \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	—100
m8	1000		
m9	1001		
m10	1010		
m11	1011		
m12	1100		
m14	1110		
m15	1111		

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	—100
m8	1000	m(8,9)	100—
m9	1001		
m10	1010		
m11	1011		
m12	1100		
m14	1110		
m15	1111		

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100
m8	1000	m(8,9)	100 —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0
m10	1010	m(8,12)	1 — 00
m11	1011	m(9,11)	10 — 1
m12	1100	m(10,11)	101 —
m14	1110	m(10,14)	1 — 10
m15	1111	m(12,14)	11 — 0
		m(14,15)	111 —

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100	m(8,9,10,11)	10 — —
m8	1000	m(8,9)	100 —		
m9	1001	m(8,10)	10 — 0		
m10	1010	m(8,12)	1 — 00		
m11	1011	m(9,11)	10 — 1		
m12	1100	m(10,11)	101 —		
m14	1110	m(10,14)	1 — 10		
m15	1111	m(12,14)	11 — 0		
		m(14,15)	111 —		

Si una cadena no se empareja, se marca con *.

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100	m(8,9,10,11)	10 — —
m8	1000	m(8,9)	100 —	m(8,10,9,11)	10 — —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0		
m10	1010	m(8,12)	1 — 00		
m11	1011	m(9,11)	10 — 1		
m12	1100	m(10,11)	101 —		
m14	1110	m(10,14)	1 — 10		
m15	1111	m(12,14)	11 — 0		
		m(14,15)	111 —		

Si una cadena no se empareja, se marca con *.

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100	m(8,9,10,11)	10 — —
m8	1000	m(8,9)	100 —	m(8,10,9,11)	10 — —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0	m(8,10,12,14)	1 — — 0
m10	1010	m(8,12)	1 — 00		
m11	1011	m(9,11)	10 — 1		
m12	1100	m(10,11)	101 —		
m14	1110	m(10,14)	1 — 10		
m15	1111	m(12,14)	11 — 0		
		m(14,15)	111 —		

Si una cadena no se empareja, se marca con *.

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100	m(8,9,10,11)	10 — —
m8	1000	m(8,9)	100 —	m(8,10,9,11)	10 — —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0	m(8,10,12,14)	1 — — 0
m10	1010	m(8,12)	1 — 00	m(8,12,10,14)	1 — — 0
m11	1011	m(9,11)	10 — 1	m(10,11,14,15)	1 — 1 —
m12	1100	m(10,11)	101 —		
m14	1110	m(10,14)	1 — 10		
m15	1111	m(12,14)	11 — 0		
		m(14,15)	111 —		

Si una cadena no se empareja, se marca con *.

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100 *	m(8,9,10,11)	10 — —
m8	1000	m(8,9)	100 —	m(8,10,9,11)	10 — —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0	m(8,10,12,14)	1 — — 0
m10	1010	m(8,12)	1 — 00	m(8,12,10,14)	1 — — 0
m11	1011	m(9,11)	10 — 1	m(10,11,14,15)	1 — 1 —
m12	1100	m(10,11)	101 —		
m14	1110	m(10,14)	1 — 10		
m15	1111	m(12,14)	11 — 0		
		m(14,15)	111 —		

Si una cadena no se empareja, se marca con *.

Minimización: método de Quine-McCluskey

A partir de la tabla de los modelos de α , emparejamos pares de cadenas que **difieren en una única posición**, y esta se reemplaza por un guion.

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100 *	m(8,9,10,11)	10 — — *
m8	1000	m(8,9)	100 —	m(8,10,9,11)	10 — —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0	m(8,10,12,14)	1 — — 0 *
m10	1010	m(8,12)	1 — 00	m(8,12,10,14)	1 — — 0
m11	1011	m(9,11)	10 — 1	m(10,11,14,15)	1 — 1 — *
m12	1100	m(10,11)	101 —		
m14	1110	m(10,14)	1 — 10		
m15	1111	m(12,14)	11 — 0		
		m(14,15)	111 —		

Si una cadena no se empareja, se marca con *

Minimización: método de Quine-McCluskey

minterm	string	minterm	string	minterm	string
m4	0100	m(4,12)	— 100 *	m(8,9,10,11)	10 — — *
m8	1000	m(8,9)	100 —	m(8,10,9,11)	10 — —
m9	1001	m(8,10)	10 — 0	m(8,10,12,14)	1 — — 0 *
m10	1010	m(8,12)	1 — 00	m(8,12,10,14)	1 — — 0
m11	1011	m(9,11)	10 — 1	m(10,11,14,15)	1 — 1 — *
⋮	⋮	⋮	⋮		

- Los implicantes marcados con * son **implicantes primos**.
- En el ejemplo:
 $m(4, 12)$, $m(8, 9, 10, 11)$, $m(8, 10, 12, 14)$, $m(10, 11, 14, 15)$.
- Aunque no todos son esenciales.

Minimización: método de Quine-McCluskey

- Los implicants marcados con * son **implicants primos**:

$m(4, 12)$, $m(8, 9, 10, 11)$, $m(8, 10, 12, 14)$, $m(10, 11, 14, 15)$

Aunque no todos son esenciales

- Tabla:

	4	8	9	10	11	12	14	15
$m(4,12)$	×					×		
$m(8,9,10,11)$		×	×	×	×			
$m(8,10,12,14)$		×		×		×	×	
$m(10,11,14,15)$				×	×		×	×

- Las columnas con una sola × indican implicants **esenciales**

Minimización: método de Quine-McCluskey

- Los implicantes marcados con * son **implicantes primos**:

$m(4, 12)$, $m(8, 9, 10, 11)$, $m(8, 10, 12, 14)$, $m(10, 11, 14, 15)$

Aunque no todos son esenciales

- Tabla:

	4	8	9	10	11	12	14	15
$m(4,12)$	×					×		
$m(8,9,10,11)$		×	×	×	×			
$m(8,10,12,14)$		×		×		×	×	
$m(10,11,14,15)$				×	×		×	×

- Las columnas con una sola × indican implicantes **esenciales**
- Los tres implicantes esenciales, $m(4, 12)$, $m(8, 9, 10, 11)$ y $m(10, 11, 14, 15)$, cubren **todos los modelos** de la fórmula.

Minimización: método de Quine-McCluskey

- Los tres implicantes **esenciales**

$$m(4, 12), \quad m(8, 9, 10, 11), \quad m(10, 11, 14, 15)$$

cubren todos los modelos de α :

$$\alpha \equiv \underbrace{(q \wedge \neg r \wedge \neg s)}_{m(4,12)} \vee \underbrace{(p \wedge \neg q)}_{m(8,9,10,11)} \vee \underbrace{(p \wedge r)}_{m(10,11,14,15)}$$

Recordamos: las secuencias que corresponden a esos implicantes son:

$$m(4, 12) \quad \mapsto \quad -100$$

$$m(8, 9, 10, 11) \quad \mapsto \quad 10--$$

$$m(10, 11, 14, 15) \quad \mapsto \quad 1-1-$$