EXAMEN DE VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL SOFTWARE. 20/1/2014.

APELLIDOS Y NOMBRE: ....

1) (**0,5 puntos**) Dadas la fórmulas α y β definidas como $\alpha \stackrel{def}{=} (p \wedge q)\,\mathcal{U}\,r$, $\beta \stackrel{def}{=} (p\,\mathcal{U}\,r) \wedge (q\,\mathcal{U}\,r)$, demostrar su equivalencia semántica o bien encontrar un contraejemplo.

   Para probar la equivalencia tendríamos que demostrar que cualquier interpretación M es modelo de α si y sólo si es modelo de β. Vamos a ver qué significa que M sea modelo de cada una de esas dos fórmulas:

   (1) $M, 0 \models \alpha$ esto es, $M, 0 \models (p \wedge q)\,\mathcal{U}\,r$ cuando, por definición, existe algún punto $n \geq 0$ tal que $M, n \models r$ y además para todo $j = 0 \dots n-1$ se da $M, j \models p \wedge q$. Esto último es lo mismo que $M, j \models p$ y $M, j \models q$.

   (2) $M, 0 \models \beta$, esto es, $M, 0 \models (p\,\mathcal{U}\,r) \wedge (q\,\mathcal{U}\,r)$ cuando son ciertas las dos condiciones $M, 0 \models p\,\mathcal{U}\,r$ y $M, 0 \models q\,\mathcal{U}\,r$ y esto, a su vez, equivale a satisfacer estas dos cosas:

   (2a) existe algún punto $n' \geq 0$ tal que $M, n' \models r$ y además para todo $j' = 0 \dots n'-1$ se da $M, j' \models p$

   (2b) existe algún punto $n'' \geq 0$ tal que $M, n'' \models r$ y además para todo $j'' = 0 \dots n''-1$ se da $M, j'' \models q$

   Nótese cómo hemos usado n' y n'' para insistir en que cada "existe" puede estar haciendo referencia a puntos distintos en la línea temporal.

   Para probar que α equivale a β vamos a demostrar por separado que (1) implica (2) y vice versa.

   - **Probar que (1) implica (2)**
     Esta dirección es la más sencilla. Suponemos que se da (1), esto es, que hay un punto n que cumple r y que todo lo anterior a n cumple $p \wedge q$. Entonces (2a) es cierto: basta con tomar $n' = n$ y ya tenemos el punto n' donde se da r y en todo los puntos anteriores se dará p, porque antes de n se da $p \wedge q$. El razonamiento para ver que (2b) se cumple es análogo.
   - **Probar que (2) implica (1)**
     Supongamos que tenemos (2a) y (2b). Para probar (1) necesitamos encontrar algún punto n donde se cumpla r. Sin embargo, en principio, nada nos garantiza que n' y n'' sean iguales. Ahora bien, si tomamos el mínimo de los dos $n = min(n', n'')$ ya podemos demostrar (1). Para ver por qué, supongamos que el mínimo es $n = n'$, esto es, el que hace cierto $p\,\mathcal{U}\,r$. Entonces, por (2a), para todo punto anterior a $n = n'$, p tiene que ser cierto. Pero como $n'' \geq n'$ y todo punto anterior a n'' cumple q, esto implica que todo punto anterior a n' también cumple q. Por tanto, todo punto anterior a $n = n'$ cumple p y cumple q, es decir, satisface $p \wedge q$. El razonamiento para cuando $n = n'' = min(n', n'')$ es totalmente análogo.

2) (**0,5 puntos**) Demostrar que la regla de inferencia $\frac{\vdash \alpha \rightarrow \bigcirc\alpha}{\vdash \alpha \rightarrow \Box\alpha}$ conocida como **Inducción** es correcta a partir del sistema de deducción LTL (ver anexo). Es decir, demostrar que si

$\alpha \to \bigcirc\alpha$ es un teorema, entonces $\alpha \to \Box\alpha$ también lo es.

1.	$\alpha \to \bigcirc\alpha$	Hipótesis de partida
2.	$\Box(\alpha \to \bigcirc\alpha)$	Aplicando **N** a 1
3.	$\Box(\alpha \to \bigcirc\alpha) \to (\alpha \to \Box\alpha)$	**Ax5**
4.	$\alpha \to \Box\alpha$	Aplicando **MP** sobre 2 y 3

Anexo. Sistema deductivo LTL

Axioms:

Ax0	PC	Any substitution instance of any Propositional Calculus tautology
Ax1	$\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	Distribution of $\Box$ over $\to$
Ax2	$\vdash \bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$	Distribution of $\bigcirc$ over $\to$
Ax3	$\vdash \Box\alpha \to (\alpha \wedge \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\Box\alpha)$	Expansion of $\Box$
Ax4	$\vdash \Box(\alpha \to \bigcirc\alpha) \to (\alpha \to \Box\alpha)$	Induction
Ax5	$\vdash \bigcirc\alpha \leftrightarrow \neg \bigcirc \neg\alpha$	Linearity

Inference rules:

MP	$\frac{\vdash\alpha,\ \ \vdash\alpha\to\beta}{\vdash\beta}$	Modus Ponens
N	$\frac{\vdash\alpha}{\vdash\Box\alpha}$	Necessitation