

Tema 1: Lógica Proposicional

Lógica-GIA

Curso 2022–2023

Tema 1: Lógica Proposicional

Curso 2022–2023

Lógica

Grado en Inteligencia Artificial

Felicidad Aguado, Pedro Cabalar, Gilberto Pérez, Concepción Vidal

Introducción

- A veces llamada **el cálculo de la informática** porque proporciona un soporte matemático para tratar con información y razonar sobre el comportamiento de los programas.
- En Computación, las reglas de la lógica se usan en el **diseño, desarrollo, verificación y mantenimiento** de programas informáticos.
- La lógica trata de la **formalización del lenguaje y los métodos de razonamiento**.
- La lógica proporciona técnicas para determinar si un **argumento (razonamiento)** es **válido** o no.

Lógica Proposicional: Proposiciones

Definición

Una *proposición* o enunciado es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.

Le asignaremos uno y sólo uno de los valores de verdad: verdadero (1) o falso (0).

Lógica Proposicional: Proposiciones

Definición

Una *proposición* o enunciado es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.

Le asignaremos uno y sólo uno de los valores de verdad: verdadero (1) o falso (0).

Son proposiciones:

- Los triángulos tienen cuatro vértices (0)
- Pedro Almodóvar es el director de La guerra de las galaxias (0)
- $2 + 2 = 4$ (1)
- $2 + 4 = 7$ (0)

Lógica Proposicional: Proposiciones

Definición

Una *proposición* o enunciado es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.

Le asignaremos uno y sólo uno de los valores de verdad: verdadero (1) o falso (0).

No son proposiciones:

- Ojalá que haga sol este fin de semana.
- ¿A qué hora vamos al cine?
- $x + 4 = 10$.

Operadores Lógicos: Sintaxis

Hay **proposiciones simples** y **proposiciones compuestas**

Definición

Una *proposición simple (o primitiva o atómica)* es aquella que no hay forma de descomponerla en otra más sencilla. Es frecuente llamarlas átomos. Un conjunto de átomos se llama *signatura* At .

Pondremos p, q, r, \dots

Operadores Lógicos: Sintaxis

Para obtener las **proposiciones compuestas** se utilizan los **conectivos u operadores lógicos**:

$$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

- **Negación** (\neg) Si p es una proposición, la negación de p se denota por $\neg p$ y se lee:

“no p ”

“no ocurre p ”

“no es cierto p ”

- **Conjunción** (\wedge) Si p y q son proposiciones, la conjunción de p y q se denota por $p \wedge q$ y se lee:

“ p y q ”

“ p , sin embargo q ”

“ p , no obstante q ”

“ p , q ”

“ p , pero q ”

“ p , aunque q ”

Operadores Lógicos: Sintaxis

- **Disyunción** (\vee) Si p y q son proposiciones, la disyunción de p y q se denota por $p \vee q$ y se lee:

“ p o q (o ambos)”
“al menos p o q ”

“como mínimo p o
 q ”

“ p a menos que q ”
“ p a no ser que q ”

- **Condicional** (\rightarrow) Si p y q son proposiciones, el condicional $p \rightarrow q$ se lee:

“Si p , entonces q ”

“Si p , q ”

“ p solo si q ”

“cuando p , entonces q ”

“ p es suficiente para q ”

“ q si p ”

“ q siempre que p ”

“ q cuando p ”

“ q es necesario para p ”

“no p a no ser que q ”

“no p a menos que q ”

Operadores Lógicos: Sintaxis

- **Bicondicional** (\leftrightarrow) Si p y q son proposiciones, el bicondicional $p \leftrightarrow q$ se lee:
 - “ p si, y solo si, q ”
 - “ p es suficiente y necesario para q ”

Operadores Lógicos: Sintaxis

Definición

Dada una signatura At , las reglas para construir una fórmula (bien formada) son:

- 1 \top y \perp son f.b.f.
- 2 Los átomos son f.b.f.
- 3 Si α es una f.b.f., $\neg\alpha$ es una f.b.f.
- 4 Si α y β son f.b.f., entonces $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \leftrightarrow \beta$ son f.b.f.
- 5 No hay más reglas.

El conjunto de fórmulas construidas con At es \mathcal{L}_{At} .

Una teoría $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_{At}$ es un conjunto de fórmulas.

Operadores Lógicos: Sintaxis

OJO

Ejemplo

$p \rightarrow \neg q$ es una f.b.f., pero $p \neg \rightarrow q$ y $p \vee \wedge q$ no lo son.

- Se pueden usar paréntesis o corchetes,
- Si hay más de una conectiva en una fórmula, entenderemos que cada conectiva afecta a la letra proposicional inmediata o al conjunto de proposiciones inmediatas encerradas entre paréntesis.

$$\neg p \vee q$$

$$\neg(p \vee q)$$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Jerarquía: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

Ejemplo

- $p \rightarrow (q \wedge r)$ puede escribirse como $p \rightarrow q \wedge r$
- $p \rightarrow q \wedge \neg r$ es $p \rightarrow (q \wedge (\neg r))$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Jerarquía: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

Los paréntesis a veces son necesarios

Ejemplo

$$\neg p \wedge (r \rightarrow t)$$

$\neg p \wedge r \rightarrow t$ representa a $(\neg p \wedge r) \rightarrow t$

Ejemplo

$$\neg p \wedge (q \vee r)$$

$\neg p \wedge q \vee r$ representa a $(\neg p \wedge q) \vee r$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Ejemplo

p : Me mareo, q : Voy en coche

- *“Me mareo si voy en coche”*

Ir en coche es suficiente para que me maree

$$q \rightarrow p$$

Operadores Lógicos: Sintaxis

Ejemplo

p : Me mareo, q : Voy en coche

- “Me mareo si voy en coche”

Ir en coche es suficiente para que me maree

$$q \rightarrow p$$

- “Me mareo solo si voy en coche”

Ir en coche es necesario para que me maree

$$p \rightarrow q$$

Operadores Lógicos: Semántica

Partimos de

$$I : At \rightarrow \{0, 1\}$$

I se denomina **interpretación**

- Si $I(p) = 0$, p es **falsa**
- Si $I(p) = 1$, p es **verdadera**

Identificamos I con $\{p \in At ; I(p) = 1\}$

Ejemplo

Si $At = \{p, q, r, s\}$, entonces

- Si $I = \{p, q\}$, $I(p) = I(q) = 1$, $I(r) = I(s) = 0$
- Si $I = \{r\}$, $I(r) = 1$, $I(p) = I(q) = I(s) = 0$
- Si $I = \{p, q, r, s\}$, $I(p) = I(q) = I(r) = I(s) = 1$
- Si $I = \emptyset$, $I(p) = I(q) = I(r) = I(s) = 0$

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- \perp es siempre falsa y \top es siempre verdadera.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- \perp es siempre falsa y \top es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- \perp es siempre falsa y \top es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- \perp es siempre falsa y \top es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.
- La **disyunción** $p \vee q$ es falsa cuando tanto p como q son falsas, y verdadera en cualquier otro caso.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- \perp es siempre falsa y \top es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.
- La **disyunción** $p \vee q$ es falsa cuando tanto p como q son falsas, y verdadera en cualquier otro caso.
- El **condicional** $p \rightarrow q$ es falso cuando p es verdadera y q es falsa, y verdadero en cualquier otro caso.

Operadores Lógicos: Semántica

Dada $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ y $p, q \in At$:

- \perp es siempre falsa y \top es siempre verdadera.
- La **negación** $\neg p$ es verdadera únicamente cuando p es falsa.
- La **conjunción** $p \wedge q$ es verdadera cuando tanto p como q son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.
- La **disyunción** $p \vee q$ es falsa cuando tanto p como q son falsas, y verdadera en cualquier otro caso.
- El **condicional** $p \rightarrow q$ es falso cuando p es verdadera y q es falsa, y verdadero en cualquier otro caso.
- El **bicondicional** $p \leftrightarrow q$ es verdadero cuando p y q tienen los mismos valores de verdad, y falso en los otros casos.

Semántica: Tablas de verdad

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Semántica: Tablas de verdad

Dada una fórmula $\alpha : (p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$,

α es verdadera o falsa dependiendo del valor de verdad de $\{p, q\}$.

- Si $I(p) = I(q) = 1$, α es falsa
- $I(p) = 1, I(q) = 0$, α es verdadera

α admite 2^2 interpretaciones ($I : \{p, q\} \rightarrow \{0, 1\}$).

Semántica: Tablas de verdad

Definición

Una *tabla de verdad* para una fórmula α es un método que proporciona los valores de verdad de α , a partir de los valores de verdad de $At(\alpha)$.

$$At(\alpha) = \{p \in At ; p \text{ aparece en } \alpha\}$$

Ejemplo

La tabla de verdad de $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ es:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Semántica: Tablas de verdad

Cada **fila** de la tabla de verdad de α es una **interpretación** de α

Si $|At(\alpha)| = n$, la tabla tiene 2^n interpretaciones (**exponencial!**)

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Semántica: Tablas de verdad

Una interpretación $I : At \rightarrow \{0, 1\}$ se puede extender a $I : \mathcal{L}_{At} \rightarrow \{0, 1\}$:

- $I \not\models \perp$, $I \models \top$
 - $I \models p$ si $I(p) = 1$ para $p \in At$
 - $I \models \neg\alpha$ si $I \not\models \alpha$
 - $I \models \alpha \wedge \beta$ si $I \models \alpha$ e $I \models \beta$
 - $I \models \alpha \vee \beta$ si $I \models \alpha$ o $I \models \beta$
 - $I \models \alpha \rightarrow \beta$ si $I \not\models \alpha$ o $I \models \beta$
 - $I \models \alpha \leftrightarrow \beta$ si $(I \models \alpha \text{ e } I \models \beta)$ o $(I \not\models \alpha \text{ e } I \not\models \beta)$
- $$I(\alpha) = 1 \text{ si } I \models \alpha$$

- Si $I(\alpha) = 1$ o $I \models \alpha$, I se llama **modelo** de α
- Si $I(\alpha) = 0$ o $I \not\models \alpha$, I se llama **contraejemplo** (o contramodelo) de α

Semántica: Tablas de verdad

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$	
0	0	0	1	1	0	\rightsquigarrow contraejemplo
0	1	1	0	1	1	\rightsquigarrow modelo
1	0	1	1	1	1	\rightsquigarrow modelo
1	1	1	0	0	0	\rightsquigarrow contraejemplo

$$M(\alpha) := \{ \text{modelos de } \alpha \}$$

$$M(\alpha) = \{ \text{modelos de } \alpha \}$$

- $M(\perp) = \emptyset$ y $M(\top) = 2^{At} = \mathcal{P}(At)$
- $M(p \wedge q) = \{\{p, q\}\}$
- $M(p \vee q) = \{\{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$
- $M(p \rightarrow q) = \{\{\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ ($\{\} = \emptyset$)

Semántica

$$M(\alpha) = \{ \text{modelos de } \alpha \}$$

Definición

Dadas dos fórmulas α y β , se dice que α es **más fuerte** que β (o β es **más débil** que α) si $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$

- $M(q) = \{ \{q\}, \{p, q\} \}$
 q es más fuerte que $p \vee q$ y que $p \rightarrow q$
- $M(p \wedge q) = \{ \{p, q\} \}$
 $p \wedge q$ es más fuerte que q y que $p \vee q$
- $M(p \vee q) = \{ \{p\}, \{q\}, \{p, q\} \}$
- $M(p \rightarrow q) = \{ \{ \}, \{q\}, \{p, q\} \}$
- $M(p \leftrightarrow q) = \{ \{ \}, \{p, q\} \}$
 $p \leftrightarrow q$ es más fuerte que $p \rightarrow q$ y que $q \rightarrow p$

Semántica

Dada una fórmula α :

- α es una **tautología** si $M(\alpha) = 2^{At}$ (solo tiene modelos)

$$\top, \neg p \vee p \text{ y } \neg \alpha \vee \alpha$$

- α es una **contradicción** si $M(\alpha) = \emptyset$ (solo tiene contramodelos)

$$\perp, \neg p \wedge p \text{ y } \neg \alpha \wedge \alpha$$

- α es una **contingencia** si tiene modelos y contramodelos

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$$

- α es **satisfacible** si $M(\alpha) \neq \emptyset$ (admite algún modelo)

Semántica

Una fórmula α es **satisfacible** si $M(\alpha) \neq \emptyset$ (admite algún modelo).

Definición

El conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es **satisfacible (o consistente)** si la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ es satisfacible.

Existe un modelo común para todas las α_i ($1 \leq i \leq n$)

El conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es **insatisfacible (o inconsistente)** si la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ no es satisfacible.

No existe un modelo común para todas las α_i ($1 \leq i \leq n$)

$\{p \wedge \neg q, \neg p \rightarrow q\}$ es consistente

$\{p \wedge \neg q, p \rightarrow q\}$ es inconsistente

Equivalencias lógicas

Definición

Dos fórmulas α y β son *lógicamente equivalentes* si, para cada interpretación, ambas tienen los mismos valores de verdad (es decir, la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es *una tautología*). Equivalentemente, $M(\alpha) = M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \equiv \beta$$

Equivalencias lógicas

Definición

Dos fórmulas α y β son *lógicamente equivalentes* si, para cada interpretación, ambas tienen los mismos valores de verdad (es decir, la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es *una tautología*). Equivalentemente, $M(\alpha) = M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \equiv \beta$$

También puede denotarse por $\alpha \iff \beta$.

Equivalencias lógicas

Definición

Dos fórmulas α y β son *lógicamente equivalentes* si, para cada interpretación, ambas tienen los mismos valores de verdad (es decir, la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es *una tautología*). Equivalentemente, $M(\alpha) = M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \equiv \beta$$

También puede denotarse por $\alpha \iff \beta$.

Es importante **diferenciar “ \equiv ” de “ \leftrightarrow ”**

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ **SI**
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ **NO**
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ **SI**

Equivalencias lógicas

Ejemplo

$\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes:

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

Equivalencias lógicas

Principales equivalencias lógicas

Leyes Conmutativas	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Leyes Asociativas	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Leyes Distributivas	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Ley de la Doble Negación	$\neg\neg p \equiv p$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
Leyes de Dominación	$p \vee \top \equiv \top$ $p \wedge \perp \equiv \perp$
Leyes de Identidad	$p \wedge \top \equiv p$ $p \vee \perp \equiv p$
Leyes de la Negación	$p \vee \neg p \equiv \top$ $p \wedge \neg p \equiv \perp$
Ley de la Contraposición	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$

Tabla: Tabla de equivalencias

Equivalencias lógicas

Principales equivalencias lógicas

Leyes de la Implicación	$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$
Leyes de la Equivalencia	$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
Leyes Idempotentes	$p \equiv (p \wedge p)$ $p \equiv (p \vee p)$
Leyes de Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
Ley de la Reducción al absurdo	$(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \neg q) \rightarrow \perp]$

Tabla: Tabla de equivalencias

Equivalencias lógicas

Sea α una fórmula y β una subfórmula de α .

Ejemplo

$\alpha : \neg(p \vee q) \rightarrow r$ y $\beta : \neg(p \vee q)$

Si $\beta \equiv \beta^*$, y sustituimos alguna ocurrencia de β en α por β^* , obtenemos α^* y $\alpha^* \equiv \alpha$.

Equivalencias lógicas

Sea α una fórmula y β una subfórmula de α .

Ejemplo

$\alpha : \neg(p \vee q) \rightarrow r$ y $\beta : \neg(p \vee q)$

Si $\beta \equiv \beta^*$, y sustituimos alguna ocurrencia de β en α por β^* , obtenemos α^* y $\alpha^* \equiv \alpha$.

Ejemplo

Como $\beta : \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, entonces:

$$\neg(p \vee q) \rightarrow r \equiv \neg p \wedge \neg q \rightarrow r$$

Equivalencias lógicas

Ejemplo

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q) &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) && \text{Ley de la implicación} \\ &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) && \text{Ley distributiva} \\ &\equiv \perp \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee \perp && \text{Ley de la negación} \\ &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) && \text{Ley Identidad}\end{aligned}$$

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α *implica lógicamente* una fórmula β si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β es *consecuencia lógica* de α , que α es *más fuerte* que β o que β es *más débil* que α .

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α *implica lógicamente* una fórmula β si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β es *consecuencia lógica* de α , que α es *más fuerte* que β o que β es *más débil* que α .

- $p \models p \vee q$
- $p \wedge q \models p$
- $p \wedge q \models p \vee q$

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α *implica lógicamente* una fórmula β si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología). Equivalentemente, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β es *consecuencia lógica* de α , que α es *más fuerte* que β o que β es *más débil* que α .

Implicaciones lógicas

Definición

Se dice que una fórmula α **implica lógicamente** una fórmula β si $\alpha \rightarrow \beta$ es una **tautología**). Equivalentemente, $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. Esta situación se representa por

$$\alpha \models \beta$$

También se dice que β es **consecuencia lógica** de α , que α es **más fuerte** que β o que β es **más débil** que α .

Es importante **diferenciar** “ \models ” de “ \rightarrow ”

- $p \rightarrow p \wedge q$ **SI**
- $p \models p \wedge q$ **NO**
- $p \models p \vee q$ **SI**

Implicaciones lógicas

Principales implicaciones lógicas

Modus Ponens	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \models q$
Modus Tollens	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \models \neg p$
Silogismo	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \models (p \rightarrow r)$
Leyes de Simplificación	$(p \wedge q) \models p$ $(p \wedge q) \models q$
Leyes de Adición	$p \models (p \vee q)$ $q \models (p \vee q)$
Silogismo Disyuntivo	$((p \vee q) \wedge \neg p) \models q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \models p$
Ley de Casos	$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \models q$
Ley de Inconsistencia	$[p \wedge \neg p] \models q$

Tabla: Tabla de implicaciones lógicas

Argumentos y Razonamientos válidos

Definición

Dado un conjunto de proposiciones $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ y una proposición C se dice que el argumento $\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \models C$ es **válido** si

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \models C$$

Las proposiciones H_1, H_2, \dots, H_n se llaman **hipótesis o premisas** y C se llama **conclusión**. El argumento es válido si, siempre que todas las hipótesis son verdaderas, también lo es la conclusión.

Tablas semánticas

Para decidir si una fórmula α es satisfacible (o si un conjunto de fórmulas es consistente o inconsistente), se puede utilizar una **tabla semántica**. Para construirla se determinan los valores de verdad de las subfórmulas de α desde las más sencillas hasta las más complejas.

Tablas semánticas

Se construye un árbol donde los nodos (finitos) son las proposiciones.
Partiendo de:

$$p \wedge q$$

|

p

|

q

$$p \vee q$$

|

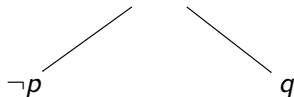
p

|

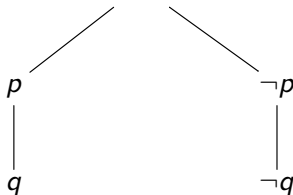
q

Representamos $p \rightarrow q$ y $p \leftrightarrow q$ como:

$$p \rightarrow q$$



$$p \leftrightarrow q$$



Tablas semánticas

- Queremos comprobar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es consistente
- Representamos $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$
- Si en una sucesión de nodos del árbol, (**camino**), aparece una proposición y su negación, se dice que es un **camino cerrado** y se marca con *.
 - Si al finalizar **todos** los caminos se cierran, la proposición $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ es una **contradicción** o el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es **inconsistente**
 - Si al finalizar **algún** camino no se cierra, ese camino es un **modelo de** $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$ y el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es **consistente**

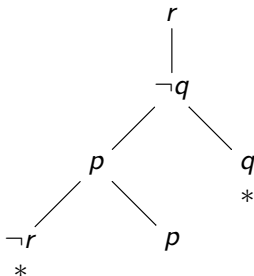
Tablas semánticas: Ejemplo

- Queremos comprobar si $\{r \rightarrow p, r, \neg q, \neg p \rightarrow q\}$ es consistente
- Representamos $(r \rightarrow p) \wedge r \wedge \neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)$

Tablas semánticas: Ejemplo

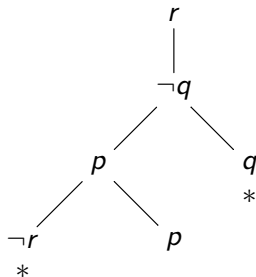
- Queremos comprobar si $\{r \rightarrow p, r, \neg q, \neg p \rightarrow q\}$ es **consistente**
- Representamos $(r \rightarrow p) \wedge r \wedge \neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)$

$$\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$$



Tablas semánticas: Ejemplo

$$\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$$



- Al final del proceso queda un camino abierto
- $I = \{p, r\}$ ($I(p) = I(r) = 1, I(q) = 0$) es un **modelo** de $(r \rightarrow p) \wedge r \wedge \neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)$
- $\{r \rightarrow p, r, \neg q, \neg p \rightarrow q\}$ es **consistente**

Argumentos y Razonamientos válidos

¿El argumento $\{p \rightarrow q, p\} \models q$ es **válido**?

Argumentos y Razonamientos válidos

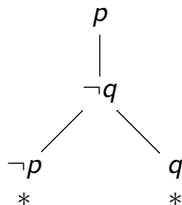
¿El argumento $\{p \rightarrow q, p\} \models q$ es **válido**?

¿La fórmula $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ es una **contradicción**?

Argumentos y Razonamientos válidos

¿El argumento $\{p \rightarrow q, p\} \models q$ es **válido**?

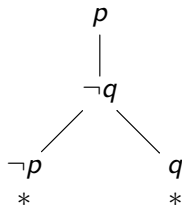
¿La fórmula $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ es una **contradicción**?



Argumentos y Razonamientos válidos

¿El argumento $\{p \rightarrow q, p\} \models q$ es **válido**?

¿La fórmula $(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ es una **contradicción**?



Son **equivalentes**:

- $\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \models C$ es **válido**
- $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C$ es una **tautología**
- $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C$ es una **contradicción**
- El conjunto $\{H_1, H_2, \dots, H_n, \neg C\}$ es **inconsistente**