Tema 2: Ejemplos de argumentos en Lógica de Predicados

Lógica-GIA

Curso 2022–2023

Satisfacibilidad y Tautologías

Sea α una sentencia (fbf sin variables libres) e I una interpretación.

Definición

- *Se dice que I es modelo de α si $v_I(\alpha) = T$ ($I \models \alpha$).*
- *Se dice que I es contramodelo de α si $v_I(\alpha) = F$ ($I \not\models \alpha$).*
- *α es satisfacible si admite algún modelo*
- *α es insatisfacible si toda interpretación I es contramodelo de α*

Definición

α es una tautología si toda interpretación I es un modelo de α

Ejemplo

Son tautologías:

- $\neg\, [\, \forall x \;\; p(x)\,] \;\leftrightarrow\; \exists x \;\; \neg p(x)$
- $\neg\, [\, \exists x \;\; p(x)\,] \;\leftrightarrow\; \forall x \;\; \neg p(x)$

Leyes de DeMorgan generalizadas

- $\neg [\forall x \ \ p(x)] \equiv \exists x \ \ \neg p(x)$
- $\neg [\exists x \ \ p(x)] \equiv \forall x \ \ \neg p(x)$

Ejemplo

Negación de $\forall x \, \exists y \, [\, p(x) \wedge \neg q(x) \rightarrow r(x,y) \,]$

$$
\begin{aligned}
& \neg [\, \forall x \ \exists y \ \ [\, p(x) \wedge \neg q(x) \rightarrow r(x,y) \,] \,] \\
\equiv \ & \exists x \ \neg \exists y \ \ [\, p(x) \wedge \neg q(x) \rightarrow r(x,y) \,] \\
\equiv \ & \exists x \ \forall y \ \ \neg [\, p(x) \wedge \neg q(x) \rightarrow r(x,y) \,] \\
\equiv \ & \exists x \ \forall y \ \ [\, p(x) \wedge \neg q(x) \wedge \neg r(x,y) \,]
\end{aligned}
$$

Satisfacibilidad y Tautologías

Sea $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un conjunto de sentencias.

Definición

- *S es satisfacible si $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ lo es*
- *Dada una sentencia β, se dice que β es consecuencia lógica de S ($S \models \beta$) si todo modelo de $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, también es modelo de β*

Son equivalentes:

- $S \models \beta$
- $S \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible

Argumentos en lógica de predicados y tablas semánticas

1. En la especificación universal no se marca como utilizada la fórmula, pues se puede volver a utilizar
2. En la especificación existencial sí se marca la fórmula al ser utilizada (con el símbolo $\checkmark$), y no se puede volver a utilizar
3. En la lógica de predicados siempre hay que utilizar las especificaciones existenciales antes que las universales
4. Si hay varias especificaciones existenciales, deben elegirse constantes distintas para cada una de ellas.
   Por ejemplo: $\{\exists x\ p(x),\ \exists x\ \neg p(x)\}$ es consistente y, de no aplicar la regla con nombres distintos, se llegaría a tener en la misma rama $p(d)$ y $\neg p(d)$, lo que daría inconsistente.

$$p(x) : \text{“}x + 3 \text{ es par”}$$
$$p(1) \text{ es verdadera}$$
$$\neg p(2) \text{ es verdadera}$$

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 1

Demostrar que el argumento

$$\{\forall x \ (R(x) \to A(x)), \ R(Juan)\} \models A(Juan)$$

es válido equivale a probar que

$$\forall x \ (R(x) \to A(x)) \wedge R(Juan) \wedge \neg A(Juan)$$

es una contradicción

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 1

$$\forall x\ (R(x) \rightarrow A(x)) \wedge R(Juan) \wedge \neg A(Juan)$$

(1) $\forall x\ (R(x) \rightarrow A(x))\ \wedge\ R(Juan)$ (premisas)

(2) $\neg A(Juan)$ (¬ conclusión)

(3) $R(Juan)$ $\checkmark$ (de 1)

(4) $\forall x\,(R(x) \rightarrow A(x))$ (de 1)

(5) $R(Juan) \rightarrow A(Juan)$ (de 4)

(6) $\neg R(Juan)$ $*$ | $A(Juan)$ $*$ (de 5)

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 2

Todos gritan o lloran. No todos lloran. Así que alguno grita y no llora

$G(x)$: "x grita" $\qquad$ $L(x)$: "x llora"

Premisas

$$\forall x\ \big(G(x) \vee L(x)\big)\ ,\ \neg\forall x\ L(x)$$

Conclusión

$$\exists x\ (G(x) \wedge \neg L(x))$$

Argumento

$$\{\forall x\ (G(x) \vee L(x)),\ \neg\forall x\ L(x)\} \models \exists x\ (G(x) \wedge \neg L(x))$$

$$\forall x\ (G(x) \vee L(x))\ \wedge \neg\forall x\ L(x)\ \wedge \neg\,\exists x\ (G(x) \wedge \neg L(x))$$

¿insatisfacible?

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 2

$$\forall x\ (G(x) \vee L(x)) \wedge \neg\forall x\ L(x) \wedge \neg\,\exists x\ (G(x) \wedge \neg L(x))$$

(1)	$\forall x\ (G(x) \vee L(x))$	(premisa)
(2)	$\neg\forall x\ L(x) \equiv \exists x\ \neg L(x)$ ✓	(premisa)
(3)	$\forall x\,(\neg G(x) \vee L(x))$	($\neg$ conclusión)
(4)	$\neg L(c)$	(de 2)
(5)	$G(c) \vee L(c)$ ✓	(de 1)
(6)	$G(c)$ $L(c)$ $*$	(de 5)
(7)	$\neg G(c) \vee L(c)$ ✓	(de 3)
(8)	$\neg G(c)$ $*$ $L(c)$ $*$	(de 7)

El argumento es válido

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 3

Importante: Si hay varias especificaciones existenciales, deben elegirse constantes distintas para cada una de ellas.

Ejemplo

Algunos poetas fueron románticos. Algunos románticos se suicidaron. Por lo tanto, algunos poetas se suicidaron

$P(x)$: "x es poeta" $R(x)$: "x es romántico" $S(x)$: "x se suicida"

$$\exists x\,(P(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x\,(R(x) \wedge S(x)) \models \exists x\,(P(x) \wedge S(x))$$

$$\exists x\,(P(x) \wedge R(x)) \wedge \exists x\,(R(x) \wedge S(x)) \wedge \neg\exists x\,(P(x) \wedge S(x))$$

¿insatisfacible?

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 3

$$\exists x\,(P(x) \wedge R(x)) \;\wedge\; \exists x\,(R(x) \wedge S(x)) \;\wedge\; \neg\exists x\,(P(x) \wedge S(x))$$

$\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$ ✓

$\exists x\,(R(x) \wedge S(x))$ ✓

$\forall x\,(\neg P(x) \vee \neg S(x))$

$P(a) \wedge R(a)$ ✓

$P(a)$

$R(a)$

$R(b) \wedge S(b)$ ✓

$\vdots$

$R(b)$

$S(b)$

$\neg P(a) \vee \neg S(a)$ ✓

$\neg P(a)$ $\neg S(a)$

$*$

$\neg P(b) \vee \neg S(b)$ ✓

$\neg P(b)$ $\neg S(b)$

$*$

Argumento no válido

Argumentos en lógica de predicados. Ejemplo 4

$\{\forall x\ (P(x) \to Q(x)),\ \forall y\ (Q(y) \to R(y))\} \models (\forall x\ P(x)) \to (\forall x\ R(x))$

$$
\begin{array}{lcccl}
H_1 & & \forall x\ (P(x) \to Q(x)) & & \\
H_2 & & \forall y\ (Q(y) \to R(y)) & & \\
\neg C & & (\forall x\ P(x)) \land (\exists x\ \neg R(x)) \ \checkmark & & \\
(1) & & \forall x\ P(x) & & \\
(2) & & \exists x\ \neg R(x) \ \checkmark & & \\
 & & \neg R(a) & & \text{especificación existencial de (2) } \textit{en a} \\
 & & P(a) & & \text{especificación universal de (1) } \textit{en a} \\
 & \neg P(a) & & Q(a) & \text{especificación universal de } H_1 \textit{ en a} \\
 & * & \neg Q(a) & R(a) & \text{especificación universal de } H_2 \textit{ en a} \\
 & & * & * &
\end{array}
$$

Argumentos en lógica de predicados. Ejercicios

- Demuestra el argumento:

$$\{(\exists x \, \neg T(x)) \to (\forall x \, \neg R(x)) \, , \, \exists x \, R(x)\} \models \exists x \, T(x)$$

- Consideremos el argumento:

  Las personas cuerdas pueden entender la lógica. Algún hijo tuyo es miembro del jurado. Ninguno de tus hijos puede entender la lógica. Por lo tanto, existe una persona que no está cuerda pero es miembro del jurado

  Con los predicados siguientes, formaliza el argumento y estudia si es válido:
  $C(x)$: "x está cuerdo"
  $L(x)$: "x puede entender la lógica"
  $J(x)$: "x es miembro de un jurado"
  $H(x)$: "x es hijo tuyo"